Trükkös átalakítások

Analízis II. B szakirány – 1. zárthelyi

Tétel. **A konvexitás kapcsolata a deriválttal**

1. $\boxed{\Longrightarrow}$: Legyen $u, v \in I$, $u < v$ tetszőleges és $x \in (u, v)$ is tetszőleges (röviden: $u < x < v$). Tegyük fel, hogy f konvex I-n. Ekkor

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u) \tag{1}$$

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v) + f(v) \tag{2}$$

Az (1) átalakítása:

$$\begin{aligned}
&f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u) && / - f(u) \\
&f(x) - f(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) && / : \overbrace{(x - u)}^{>0} \\
&\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}
\end{aligned}$$

A (2) átalakítása (vigyázat: negatívval osztunk):

$$\begin{aligned}
&f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v) + f(v) && / - f(v) \\
&f(x) - f(v) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v) && / : \overbrace{(x - v)}^{<0} \\
&\frac{f(x) - f(v)}{x - v} \geq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} && /\textit{a relációs jel megfordul}
\end{aligned}$$

A bizonyítás hátralévő része...

2. $\boxed{\Longleftarrow}$: Tegyük fel, hogy $f' \nearrow I$-n. Legyen $u, v \in I$, $u < v$ tetszőleges és $x \in (u, v)$ is tetszőleges (röviden: $u < x < v$). Ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\exists \xi_1 \in (u, x) : f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \quad \text{és} \quad \exists \xi_2 \in (x, v) : f'(\xi_1) = \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

Mivel $f' \nearrow I$-n, ezért $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, vagyis

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

$$\begin{aligned}
&f(x) \cdot \frac{1}{x - u} - f(u) \cdot \frac{1}{x - u} \leq f(v) \cdot \frac{1}{v - x} - f(x) \cdot \frac{1}{v - x} \\
&f(x) \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{x - u}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{v - x}}_{>0} \right) \leq f(v) \cdot \frac{1}{v - x} + f(u) \cdot \frac{1}{x - u}
\end{aligned}$$

/ ... *közös nevező, nevezővel beszorzás*

$f(x)(v-u) \leq f(v)(x-u) + f(u)(v-x)$

$f(x)(v-u) \leq f(v)x - f(v)u + f(u)v - f(u)x$

$f(x)(v-u) \leq (f(v)-f(u))\,x - f(v)u + f(u)v$

$f(x) \leq \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \cdot x + \dfrac{-f(v)u + f(u)v}{v-u}$ /**trükk**: $\boxed{+f(u)u - f(u)u}$

$f(x) \leq \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \cdot x + \dfrac{-f(v)u + f(u)v + f(u)u - f(u)u}{v-u}$

$f(x) \leq \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \cdot x + \dfrac{-u(f(v)-f(u))}{v-u} + \dfrac{f(u)(v-u)}{v-u}$

$f(x) \leq \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \cdot x + \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \cdot (-u) + f(u)$

$$\boxed{f(x) \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \cdot (x-u) + f(u)}$$

A bizonyítás hátralevő része…