Programozáselmélet – Tételek bizonyítással

Borsi Zsolt előadásai alapján

Utolsó módosítás: 2023. december 27.

1. Tétel. Tetszőleges feladatot megoldó program létezése.

Legyen A tetszőleges állapottér. Legyen $F \subseteq A \times A$ tetszőleges feladat. **Minden feladathoz létezik egy olyan program, amelyik megoldja azt**, azaz

$$\forall F \subseteq A \times A,\ \exists S \subseteq A \times (\overline{A} \cup \{\textbf{fail}\})^{**} : S \text{ megoldja az } F \text{ feladatot}$$

Bizonyítás. Legyen S olyan, hogy $p(S) = F$. Ekkor a megoldás definíciója szerint, hogy

I.) $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S)} \iff \mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_F$ ✓

II.) $\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S)(a) = F(a) \iff F(a) \subseteq F(a)$ ✓

Példa. Legyen $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $F := \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 4)\}$ és $p(S) := F$

Több ilyen megoldás is létezhet.

$S_1 := \{1 \to \langle 1\rangle,\ 2 \to \langle 2, 4, 2\rangle,\ 2 \to \langle 2, 1, 4, 1, 3\rangle,\ 3 \to \langle 3, 3, \ldots\rangle,\ 4 \to \langle 4, 1, 2, 3, 4\rangle,\ 4 \to \langle 4, 3, 4\rangle\}$

$S_2 := \{1 \to \langle 1, 3, 2, 1\rangle,\ 2 \to \langle 2\rangle,\ 2 \to \langle 2, 3\rangle,\ 3 \to \langle 3, \textbf{fail}\rangle,\ 4 \to \langle 4\rangle\}$ □

2. Tétel.

Legyen A tetszőleges alap-állapottér, $S_1, S_2 \subseteq A \times (\overline{A} \cup \{\textbf{fail}\})^{**}$ program és $F \subseteq A \times A$ feladat úgy, hogy S_1 megoldja az F feladatot. Továbbá legyen $S_2 \subseteq S_1$.
Ekkor az S_2 **program szintén megoldja F feladatot**.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy S_1 megoldja az F feladatot, azaz a megoldás definíciója szerint

I.) $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_1)}$

II.) $\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S_1)(a) \subseteq F(a)$

Azt is tudjuk, hogy $S_2 \subseteq S_1$. Mivel S_2 is program A felett, ezért $\forall a \in A : S_2(a) \subseteq S_1(a)$.

Állítás: $\underline{\mathcal{D}_{p(S_1)} \subseteq \mathcal{D}_{p(S_2)}}$. Tegyük fel, hogy egy állapot eleme $\mathcal{D}_{p(S_1)}$-nek. Ha az S_2 legfeljebb ugyanezt csinálja, mint az S_1 (más sorozatokat – azaz többet – nem tud hozzárendelni), akkor ezek is csak végesek és hibátlanok lehetnek.

Lássuk be, hogy S_2 megoldja az F feladatot!

I.) $\underline{\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_2)}}$

Tudjuk, hogy $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_1)} \land \mathcal{D}_{p(S_1)} \subseteq \mathcal{D}_{p(S_2)} \implies \mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S_2)}$ ✓

II.) $\underline{\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S_2)(a) \subseteq F(a)}$. Jó lenne, ha hasonló módon be tudnánk látni.

$\forall a \in A : p(S_2)(a) \overset{?}{\subseteq} p(S_1)(a) \to$ sajnos nem igaz

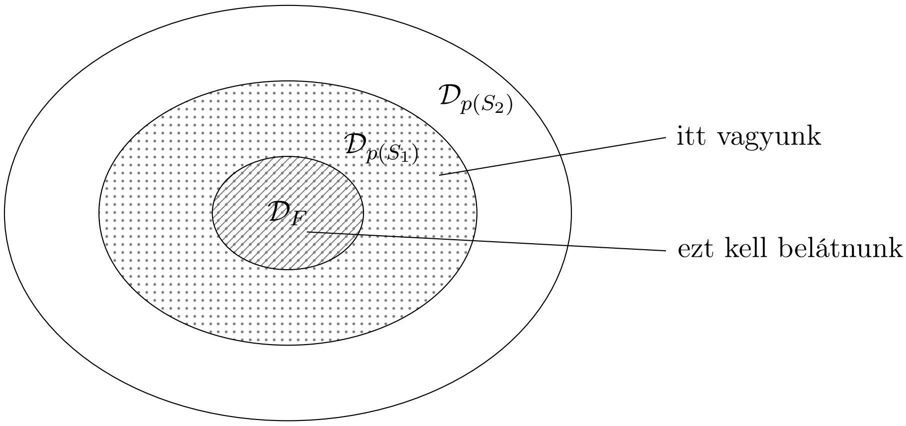
$\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S_1)(a) \subseteq F(a)$

Ellenpéldával belátható: $A := \{1\}$, $S_1 := \{1 \to \langle 1\rangle,\ 1 \to \langle 1, \textbf{fail}\rangle\}$, $S_2 := \{1 \to \langle 1\rangle\}$.

Teljesül, hogy $S_2 \subseteq S_1$, azonban $\mathcal{D}_{p(S_1)} = \emptyset \implies p(S_2)(a) \not\subseteq p(S_1)(a)$

Valójában ezt kell vizsgálnunk:

$$\left.\begin{array}{ll}\forall a \in \mathcal{D}_{p(S_1)} : & p(S_2)(a) \subseteq p(S_1)(a) \\ \forall a \in \mathcal{D}_F : & p(S_2)(a) \subseteq p(S_1)(a) \\ \forall a \in \mathcal{D}_F : & p(S_1)(a) \subseteq F(a)\end{array}\right\} \implies \forall a \in \mathcal{D}_F : p(S_2)(a) \subseteq F(a) \checkmark$$



$\square$

3. Tétel. Minden feladatnak létezik paramétertere.

Legyen A tetszőleges alap-állapottér, B tetszőleges paramétertér. Legyen $F \subseteq A \times A$ feladat úgy, hogy $F_1 \subseteq A \times B$, $F_2 \subseteq B \times A$ és $F_2 \circ F_1 = F$. Ekkor

$$\forall F \subseteq A \times A,\ \exists B \text{ paramétertér},\ F_1 \subseteq A \times B,\ F_2 \subseteq B \times A : F_2 \circ F_1 = F$$

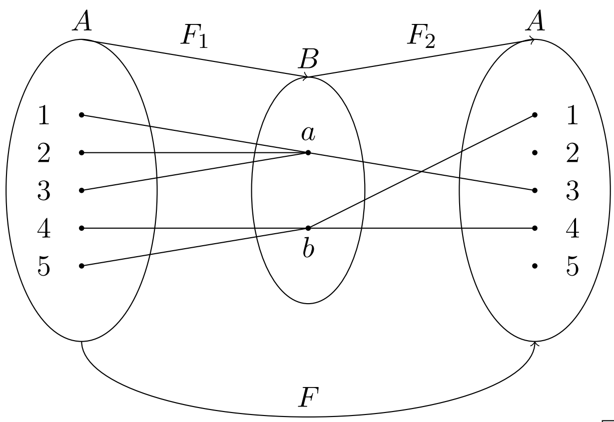
Bizonyítás. Legyen $B = A$, $F_1 = F$ és $F_2 = id$ (*identikus leképezés*). Ekkor $F_2 \circ F_1 = id \circ F = F$. $\square$

4. Tétel. Minden feladatnak akárhány paramétertere van.

Minden feladatnak akárhány paramétertere van.

Bizonyítás. Pontos bizonyatás helyett ábrát szemlélgetünk (így szerepelt az előadásban is).

$A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{a, b\}$,
$F = F_2 \circ F_1$, ahol
$F := \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 1), (5, 1), (4, 4), (5, 4)\})$
$F_1 := \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, b)\}$
$F_2 := \{(a, 3), (b, 1), (b, 4)\}$
De csak ez az egy darab paramétertér létezik? Nem. Legyen $C := \{\alpha, \beta, \gamma\}$ új paramétertér, ahol az α az a-nak, a β a b-nek felel meg – a γ meg üresen marad.
Egyszerűen a paraméterek **átnevezés**ével, vagy újak **hozzáadás**ával új paraméterteret kaphatunk.



$\square$

5. Tétel. Specifikáció tétele

Legyen A tetszőleges alap-állapottér, $F \subseteq A \times A$ feladat és $S \subseteq A \times (\overline{A} \cup \{\textbf{fail}\})^{**}$ program. Legyen B tetszőleges paramétertere F-nek, ahol $b \in B$ egy paraméter. Ehhez definiáljunk két logikai függvényt. $Q_b, R_b : A \to \mathbb{L}$ úgy, hogy

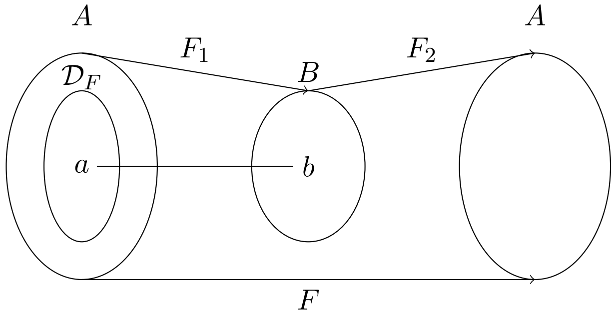
$$\lceil Q_b \rceil := F_1^{(-1)}(b) = \{a \in A \mid (a, b) \in F_1\}$$

$$\lceil R_b \rceil := F_2(b) = \{a \in A \mid (b, a) \in F_2\}$$

Ha $\forall b \in B : Q_b \Longrightarrow lf(S, R_b)$, akkor S **megoldja az F feladatot**.

Bizonyítás. Hasonlóan, mint eddig, itt is a *megoldás definíció*jának két pontját fogjuk belátni.

I.) $\underline{\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}}$



Legyen $a \in \mathcal{D}_F$ tetszőleges[1]. Ha a-ról belátható, hogy $a \in \mathcal{D}_{p(S)}$, akkor $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}$.

Mivel $a \in \mathcal{D}_F \Longrightarrow a \in \mathcal{D}_{F_1} \Longleftrightarrow \exists b \in B : (a, b) \in F_1 \Longleftrightarrow a \in \lceil Q_b \rceil$

és mivel $(Q_b \Longrightarrow lf(S, R_b)) \Longleftrightarrow \lceil Q_b \rceil \subseteq \lceil lf(S, R_b) \rceil$,

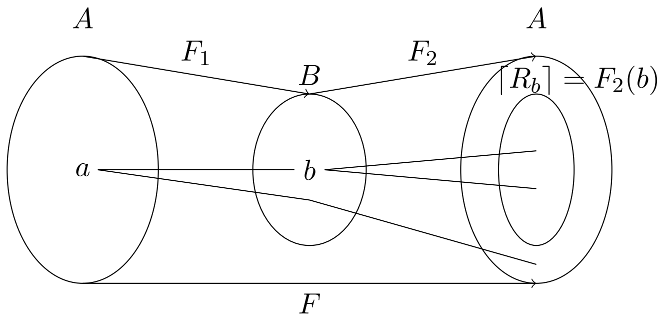
valamint tudjuk, hogy $\lceil lf(S, R_b) \rceil \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}$ (lásd *leggyengébb előfeltétel* definíciója).

Így $\lceil Q_b \rceil \subseteq \lceil lf(S, R_b) \rceil \subseteq \mathcal{D}_{p(S)} \Longleftrightarrow \lceil Q_b \rceil \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}$, azaz röviden $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}$. ✓

II.) $\underline{\forall a \in \mathcal{D}_F : p(S)(a) \subseteq F(a)}$

Legyen $a \in \mathcal{D}_F$ tetszőleges állapot. Be kell látnunk, hogy $p(S)(a) \subseteq \mathcal{D}_F$.

Mivel $a \in \mathcal{D}_F \Longrightarrow \exists b \in B : (a, b) \in F_1$ és $\lceil Q_b \rceil \subseteq \lceil lf(S, R_b) \rceil$, de így a definíció szerint az is következik, hogy $p(S)(a) \subseteq \lceil R_b \rceil = F_2(b)$.



$F_2(b) \subseteq F(a)$ és $p(S)(a) \subseteq \lceil R_b \rceil = F_2(b) \subseteq F(a) \Longrightarrow p(S)(a) \subseteq F(a)$ ✓

Így beláttuk a specifikáció tételét!

□

[1] Az, hogy a **tetszőleges**, fontos kikötés, ugyanis ez engedi meg nekünk, hogy ne kelljen a $\mathcal{D}_F$ összes elemét megnézni.