Formális nyelvek és a fordítóprogramok alapjai

2023/2024/2. félév, B szakirány

NAGY SÁRA előadásai és gyakorlatai, valamint
DR. HORPÁCSI DÁNIEL előadásai alapján

Utolsó módosítás: 2024. június 9.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet az ELTE IK *Formális nyelvek és a fordítóprogramok alapjai* c. tantárgy anyagát dolgozza fel, amit B szakirányon (*Szoftvertervező specializáció*) tanítanak. A tantárgy több, korábbi tárgynak az összeillesztéséből alakult ki, emiatt eltér attól, amit más szakirányokon oktatnak. Az a legjelentősebb eltérés, hogy az elméleti anyag leginkább a fordítóprogramok részhez szükséges ismereteket készíti elő. A formális nyelvekről szóló előadásokat Nagy Sára, a fordítóprogramokról szólókat meg Dr. Horpácsi Dániel tartották.

A jegyzet fejezetenként feldolgoz egy-két előadást. Bizonyos „előadásokat” összeolvasztottam, mert didaktikai szempontból egybetartoztak, másokat meg szétszedtem.

A jegyzet készítésének idején a vizsgán nem kérték számon a tételek bizonyítását, így ennek szellemében vázlatosabban voltak leadva az előadásokon. Akit érdekelnek, azok az alábbi jegyzetek közül szemezgethetnek – valamint ezeket használtam fel ezen jegyzet elkészítéséhez. Egy apró megjegyzés: az [1.]-es forrásra néha úgy hivatkozok, hogy „*a régi jegyzet*”, de ez senkit ne tévesszen meg. Az online elérhető jegyzetekhez kattintható hivatkozást is mellékeltem.

Igyekeztem a legjobb tudásom szerint összeállítani a jegyzetet, ennek ellenére előfordulhatnak benne elgépelések, hibák, stb. Ha találsz ilyet, kérlek értesíts e-mailben a(z) ap3558@inf.elte.hu címen.

Sikeres felkészülést kívánok!

Kiss-Bartha Nimród

Felhasznált források:

[1.] Dr. Hunyadvári László, Manhertz Tamás – Automaták és formális nyelvek (*Utolsó frissítés: 2006. január 13.*) [`pdf`]

[2.] Az előadások diasorai (2024.) (*Canvason elérhetők*)

[3.] Dr. Ásványi Tibor – Algoritmusok és adatszerkezetek II. előadásjegyzet [`pdf`]

[4.] további források

1. fejezet

Szavak és nyelvek

1.1. Alapvető fogalmak

1.1.1. definíció (Ábécé). *Egy Σ véges és nemüres halmazt **ábécé**nek hívunk. Ennek elemeit **betű**knek hívjuk.*

Az ábécé jele a szakirodalomban változhat – például az előadáson V-vel jelöltük, azonban *Algoritmusok és adatszerkezetek II.*-ből Σ volt a jele. A jegyzet ezt az utóbbit fogja használni.

1.1.2. definíció (Szó és hossza). *Az $u \in \Sigma^*$ véges sorozatot egy **sztring**nek vagy **szó**nak nevezzük, melynek hosszát az $\ell : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ függvény jelöli úgy, hogy*

$$\forall u \in \Sigma^* : 0 \leq \ell(u) < \infty.$$

*Speciális esete az **üres szó**, melynek jele $\boxed{\varepsilon}$ és $\ell(\varepsilon) = 0$.*

A *sztring* és *szó* elnevezés felcserélhető, ám jellemzően szónak hívunk egy véges betűsorozatot, ha tudjuk róla, hogy az egy nyelvnek egy szava.

A Σ^* jelöli azon véges sorozatok halmazát, melyeket a Σ ábécé betűiből képeztünk. Ennek eleme az üres sorozat vagy üres szó is, azaz $\boxed{\varepsilon \in \Sigma^*}$. Megállapodunk abban, hogy

$$\boxed{\Sigma^+ := \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}}.$$

A **legszűkebb ábécé**t egy szóra nézve az alábbi módon jelöljük: $\Sigma(u) \subseteq \Sigma$.

Egyes szerzők az abszolútérték jelet használják a szó hosszának jelölésére, azaz $|u| = \ell(u)$. A jegyzet az ℓ betűvel fogja jelölni, ugyanis ez kevésbé félreérthető.

Lekérdezhetjük, hogy egy adott szó mennyit tartalmaz egy adott betűből. Például ha $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, akkor

$$\ell_{\mathtt{a}}(u) \quad (u \in \Sigma^*)$$

azt jelöli, hány darab $\mathtt{a}$ betű található az u szóban.

1.1.3. definíció (Nyelv). *A $L \subseteq \Sigma^*$ halmazt **nyelv**nek nevezzük (azaz a nyelv egy halmaz, ami szavakat tartalmaz).*

Speciális nyelvek:

- üres nyelv: $\boxed{\emptyset}$ vagy $\boxed{L_\emptyset}$
- üres szót tartalmazó nyelv: $\boxed{\{\varepsilon\}}$ vagy $\boxed{L_\varepsilon}$

Annak ellenére, hogy a halmaz rendezetlenül tárolja az elemeit, hagyományosan **lexikografikus sorrend**ben szoktuk felsorolni a nyelv szavait. Ez ábécé szerinti elsődleges és hossz szerinti másodlagos rendezést jelent.

1.1.4. definíció (Nyelvcsalád). *Legyenek $L_1, L_2, \ldots, L_k \subseteq \Sigma^*$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ nyelvek egy ábécé felett. Ekkor a $\mathcal{L} := \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ halmazt **nyelvcsalád**nak vagy **nyelvosztály**nak hívjuk.*

1.2. Műveletek

1.2.1. Műveletek szavak felett

1.2.1. definíció (Konkatenáció). *Legyen $u := u_1u_2\ldots u_n$ és $v := v_1v_2\ldots v_m$ két szó Σ^* felett $(u, v \in \Sigma^*)$. Ekkor*

$$uv := u_1u_2\ldots u_nv_1v_2\ldots v_m$$

*az u és v **konkatenációja** $(uv \in \Sigma^*)$. Jele általában nincs (néha ponttal $(\cdot)$ jelezzük).*

A **konkatenáció tulajdonságai** – $\forall u, v, w \in \Sigma^*$:

1. asszociatív: $u(vw) = (uv)w$,
2. nem kommutatív: $uv \neq vu$,
3. Σ^*-ra zárt művelet (nem vezet ki a halmazból),
4. egységeleme az üres szó (ε): $\varepsilon u = u\varepsilon = u$,
5. $(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$ egy egységelemes félcsoportot alkot.

1.2.2. definíció (Hatványozás). *Legyen $u \in \Sigma^*$ és $n \in \mathbb{N}$.*

$$u^n := \begin{cases} \varepsilon & (n = 0) \\ u & (n = 1) \\ u^{n-1}u & (n > 1). \end{cases}$$

A fenti definíció *balrekurzív*, de ugyanúgy működne, ha jobbrekurzívan definiálnánk.

A *konkatenáció*t és a *hatványozás*t **reguláris műveletek**nek nevezzük.

1.2.3. definíció (Megfordítás). *Legyen* $u_1u_2\dots u_n =: u \in \Sigma^*$. *Ekkor*

$$u^R := u^{-1} := u_nu_{n-1}\dots u_2u_1$$

Jele: $\boxed{u^{-1}}$ *vagy* $\boxed{u^R}$.

Ismertetünk további, szavakkal kapcsolatos alapfogalmakat. $\forall u, v \in \Sigma^*$,

1. **Részszó**: $\exists w_1, w_2 \in \Sigma^* : u = w_1vw_2$.
2. **Prefix**: $v \sqsubseteq u \Longleftrightarrow \exists w \in \Sigma^* : u = vw$.
3. **Szuffix**: $u \sqsupseteq v \Longleftrightarrow \exists w \in \Sigma^* : u = wv$.
4. **Valós prefix ($\sqsubset$), valós szuffix ($\sqsupset$)**: a megfelelő definíció, továbbá $v \neq \varepsilon \wedge v \neq u$.

A jelöléseket az *Algoritmusok és adatszerkezetek II.* jegyzetből kölcsönöztem.

1.2.2. Műveletek nyelvek felett

Az eddig megismert, szavakon értelmezett műveleteket kiterjesztjük a nyelvek szintjére, valamint a már jól ismert halmazműveleteket is megvizsgáljuk, hogyan viselkednek a nyelvek felett.

1.2.4. definíció (Unió). *Legyen* $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. *Ekkor*

$$L_1 \cup L_2 := \{u \in \Sigma^* \mid u \in L_1 \vee u \in L_2\}.$$

Tulajdonságai:

1. kommutatív: $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$
2. asszociatív: $L_1 \cup (L_2 \cup L_3) = (L_1 \cup L_2) \cup L_3$
3. egységeleme a(z) üres nyelv ($L_\emptyset$): $L \cup L_\emptyset = L_\emptyset \cup L = L$

1.2.5. definíció (Metszet). *Legyen* $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. *Ekkor*

$$L_1 \cap L_2 := \{u \in \Sigma^* \mid u \in L_1 \wedge u \in L_2\}.$$

1.2.6. definíció (Komplementer). *Legyen* $L \subseteq \Sigma^*$. *Ekkor*

$$\bar{L} := \Sigma^* \setminus L.$$

Tulajdonságai:

1. $L \cup \bar{L} = \Sigma^*$
2. $L \cap \bar{L} = L_\emptyset$

1.2.7. definíció (Konkatenáció). *Legyen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Ekkor*

$$L_1L_2 := \{uv \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\}.$$

Tulajdonságai:

1. a nyelvek felett is asszociatív, de nem kommutatív (ahogyan a szavak esetében)
2. egységeleme az üres nyelvet tartalmazó nyelv (L_ε): $LL_\varepsilon = L_\varepsilon L = L$
3. a nyelvek halmaza a konkatenációra nézve egység elemes félcsoport alkot
4. kétoldali disztributivitás áll fenn az unióval:

$$L(L_1 \cup L_2) = LL_1 \cup LL_2$$
$$(L_1 \cup L_2)L = L_1L \cup L_2L$$

5. vigyázat: a metszettel nem áll fenn a disztributivitás:

1.2.8. definíció (Nyelv hatványa). *Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ és $n \in \mathbb{N}$.*

$$L^n := \begin{cases} L_\varepsilon & (n = 0) \\ L & (n = 1) \\ L^{n-1}L & (n > 1). \end{cases}$$

Felhívjuk a figyelmet a következő, látszólag hasonló, ám eltérően működő műveletre.

1.2.9. definíció (Nyelv megfordítása). *Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv. Ekkor*

$$L^{-1} := \left\{u^{-1} \;\middle|\; u \in L\right\}$$

*jelöli az L **nyelv megfordítását**.*

A nyelv megfordításának jelentése: minden szavát megfordítjuk. Ellenben a **nyelv hatványra emelése** arról szól, hogy a nyelv szavait összekonkatenáljuk egymással az összes lehetséges módon – vagyis **nem szavankénti hatványozást jelent**!

A következő művelet a hatványozást „emeli egy magasabb szintre”.

1.2.10. definíció (Nyelv lezártja, iteráltja). *Legyen $L \subseteq \Sigma^*$. Ekkor*

$$L^* := L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots = \bigcup_{i \geq 0} L^i.$$

Pozitív lezártja:

$$L^+ := L^* \setminus L_\varepsilon = \bigcup_{i \geq 1} L^i.$$

Az alábbi műveleteket nevezzük **reguláris műveletek**nek: $\boxed{\text{unió, konkatenáció, lezárás}}$.

2. fejezet

Nyelvtanok és osztályozásuk

2.1. Nyelvek definiálási módjai

1. Felsorolással: $L := \{\texttt{pa}, \texttt{ta}, \texttt{ka}\}$.
2. Logikai formulával (invariánssal): $L := \{\texttt{a}^n\texttt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
3. Strukturális rekurzióval: megszámlálhatóan végtelen nyelveken végrehajtunk véges számú elemi műveletet.
$$L := \{\texttt{ab}\}^*\{\texttt{cd}\}$$
4. Algoritmussal
5. Matematikai gépekkel (automatákkal)
6. Produkciós rendszerekkel (szabályokkal)

A továbbiakban a produkciós rendszerekkel fogunk részletesebben foglalkozni.

2.2. Nyelvtanok

2.2.1. definíció (Nyelvtan). ***Nyelvtan****nak (vagy* ***grammatiká****nak) nevezzük az alábbi négyest:*
$$G := (N, T, P, S),$$
ahol
- *N a* ***nemterminális jelek*** *halmaza,*
- *T a* ***terminális jelek*** *halmaza (ábécé),*
- *P a* ***produkciós szabályok*** *halmaza,*
- *S a* ***startszimbólum*** *(vagy kezdőszimbólum).*

Kiemelünk pár tulajdonságot, amik a nyelvtan összetevőire teljesülnek.

- $N \cup T = \emptyset$, azaz a nemterminálisok és terminálisok halmaza diszjunktak.
- $S \in N$, azaz a startszimbólum egy nemterminális jel.
- P elemeit **produkciós szabályok**nak nevezzük, melyeket az alábbi módon írunk le:
$$(p, q) \in P \iff p \longrightarrow q \in P.$$

- A szabály bal oldalának alakja: $p \in (T \cup N)^* N (T \cup N)^*$. *Jelentése*: legalább egy nemterminálisnak muszáj szerepelnie a szabály bal oldalán.
- A szabály jobb oldalának alakja: $q \in (T \cup N)^*$.
- A szabály két oldalát a „$\longrightarrow$” jellel választjuk el.
- A $(T \cup N)^*$ halmaz elemeit **mondatformá**knak nevezzük. A fogalom azért szükséges, ugyanis meg akarjuk különböztetni, hogy mikor beszélünk „tisztán” szóról és mikor terminálisok és nonterminálisok vegyes véges sorozatáról.

2.2.2. definíció (Nyelvtan által generált nyelv). *Legyen $G := (N, T, P, S)$. Ekkor a G nyelvtan által generált nyelv azon szavak halmazát jelenti, melyek* ***közvetlenül vagy közvetetten levezethetők a G-ből****, vagyis*

$$L(G) := \left\{ u \in T^* \;\middle|\; S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} u \right\}.$$

Pár szót a jelölésről. A $*$ arra utal, hogy mennyi lépésben tudunk eljutni az S kezdőszimbólumból az u szóig. Véges sok lépésszámot kell jelentsen. Akár konkrét értéket is megadhatunk. A G csupán arra utal, hogy a G nyelvtan generálja a szóban forgó szót. Ha a kontextusból egyértelmű, akkor elhagyhatjuk.

Továbbá figyeljük meg, hogy eltérő nyilat ($\Longrightarrow$) használunk arra, amikor mondatformából vezetünk le egy szót. Az előző eset ($\longrightarrow$) csupán a produkciós szabály jobb és bal oldalának elválasztására szolgált.

A definícióban szerepelt olyan megfogalmazás, hogy közvetetten, illetve közvetlenül levezetünk egy szót a startcsúcsból. A levezetés ezen két fajtáját itt definiáljuk.

2.2.3. definíció (Közvetlen levezetés). *Legyen $G := (N, T, P, S)$ egy adott nyelvtan, valamint legyen $u, v \in (T \cup N)^*$ két mondatforma. Azt mondjuk, hogy a v* ***mondatforma közvetlenül levezethető az u mondatformából****, ha*

$$\exists u_1, u_2 \in (T \cup N)^*, \exists x \longrightarrow y \in P : u = u_1 x u_2 \wedge v = u_1 y u_2.$$

Jelölése: $\boxed{u \underset{G}{\Longrightarrow} v}$.

2.2.4. definíció (Közvetett levezetés). *Legyen $G := (N, T, P, S)$ egy adott nyelvtan, valamint legyen $u, v \in (T \cup N)^*$ két mondatforma. Azt mondjuk, hogy a v* ***mondatforma közvetetten levezethető az u mondatformából****, ha*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \exists x_0, x_1, \ldots, x_k \in (T \cup N)^*, u = x_0 \wedge v = x_k, \forall i \in [0\,..\,k-1] : x_i \underset{G}{\Longrightarrow} x_{i+1}.$$

Jelölése: $\boxed{u \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} v}$.

Szavakban: létezik egy k elemből álló mondatformák sorozata, melynek legeleje az u és legvége a v. Ezek között egyesével haladva közvetlenül levezethetők az egyes mondatformák úgy, hogy a sorozatban a soron következőbe jutunk el.

2.2.5. definíció (Nyelvek ekvivalenciája). *Legyen G_1, G_2 két nyelvtan.*

- *G_1 és G_2 **ekvivalensek**, ha* $\boxed{L(G_1) = L(G_2)}$.
- *G_1 és G_2 **kvázi-ekvivalensek**, ha* $\boxed{L(G_1) \setminus L_\varepsilon = L(G_2) \setminus L_\varepsilon}$ *, azaz csak az üres szó generálásában térnek el.*

2.2.1. tétel. *Nem minden nyelv írható le nyelvtannal.*

2.3. A Chomsky-féle grammatikatípusok

2.3.1. definíció (Chomsky-féle grammatikatípusok). *A $G = (N, T, P, S)$ nyelvtan i-típusú ($i = 0, 1, 2, 3$), ha P szabályhalmazára teljesülnek a következők:*

*0. **típus** ($i = 0$) – Nincs korlátozás.*

*1. **típus** ($i = 1$) – **környezetfüggő nyelvtan**:*
P minden szabálya $\boxed{u_1Au_2 \longrightarrow u_1vu_2}$ *alakú, ahol $u_1, u_2, v \in (N \cup T)^*$, $A \in N$, és $v \neq \varepsilon$, kivéve az $S \longrightarrow \varepsilon$ alakú szabályt, de ekkor S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.*[a]

*2. **típus** ($i = 2$) – **környezetfüggetlen nyelvtan**:*
P minden szabálya $\boxed{A \longrightarrow v}$ *alakú, ahol $A \in N$, $v \in (N \cup T)^*$.*

*3. **típus** ($i = 3$) – **reguláris nyelvtan**:*
P minden szabálya vagy $\boxed{A \longrightarrow uB}$ *vagy* $\boxed{A \longrightarrow u}$ *alakú ($A, B \in N, u \in T^*$).*

[a] Ezt "*Korlátozott ε-szabály*"-nak, röviden: KES-szabálynak hívjuk.

Az i-típusú nyelvtanok vagy grammatikák halmazát $\boxed{\mathcal{G}_i}$ -vel jelöljük. A grammatikák alakjából következik, hogy

$$\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{G}_0 \quad (i = 1, 2, 3).$$
$$\mathcal{G}_3 \subseteq \mathcal{G}_2.$$

2.3.2. definíció. *Egy L nyelvet i-típusúnak nevezünk ($i \in \{0, 1, 2, 3\}$), ha létezik olyan i-típusú grammatika, ami az L nyelvet generálja, azaz*

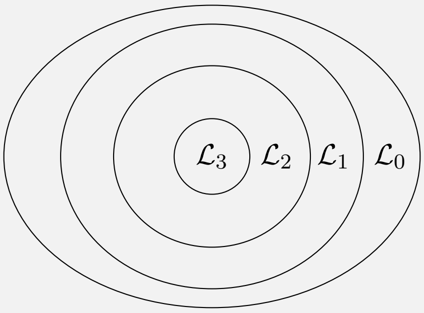
$$\exists G \in \mathcal{G}_i : L(G) = L.$$

Az i-típusú nyelvek halmazát – nyelvcsaládját, nyelvosztályát – jelölje $\mathcal{L}_i$, azaz

$$\mathcal{L}_i := \{L \text{ nyelv} \mid \exists G \in \mathcal{G}_i : L(G) = L\} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

2.3.1. tétel (Chomsky-féle hierarchia).

$$\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0.$$



Megjegyzés. A tartalmazásnak $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ része nem triviális az 1-es típusú nyelvek (nyelvtanok) kínos definíciója miatt.

A tételnek létezik az **erősebb változata**, mely valódi tartalmazást állít:

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0.$$

Figyeljük meg, hogy a Chomsky-féle hierarchia **nyelvcsaládokra** és **nem nyelvtanokra** vonatkozik. Emiatt

$$\mathcal{G}_3 \subseteq \mathcal{G}_2 \subsetneq \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_0.$$

Ha a 2-es típusú szabályoknál is kikötnénk, hogy $v \neq \varepsilon$, akkor igaz lenne a tartalmazás, és akkor triviálisan igaz lenne a nyelvcsaládokra is tartalmazás.

Ha ugyanazon nemterminálishoz több szabály tartozik, akkor tömörebben is felírhatjuk a rá vonatkozó szabályokat az alábbi módon:

$$S \longrightarrow \varepsilon \mid \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid SS,$$

ahol a „ | ” jelek amolyan „*vagy*” jelentéssel bíró elválasztók. Ezt használja ki a **Backus–Naur-jelölés** (angolul **Backus–Naur-form**, röviden **BNF**), melyet a programozási nyelvek szintaxisának felírásához szoktak használni. Például ugyanez a nyelv BNF-fel felírva:

```
<start> ::= ε | a <start> b | <start> <start>,
```

ahol a $\boxed{\texttt{<, >}}$ jelek olyan *metaszimbólumok*, melyekkel meg lehet címkézni az egyes nemterminálisokat. A $\boxed{\texttt{::=}}$ felel meg a $\longrightarrow$ jelölésnek.

Egy egyszerű példa, ami néhány magyar mondat generálására képes. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy egyetlen terminális jelből áll a `macska`, `kutya`, stb. szavunk.

```
<mondat>       ::= <alany> <állítmány> .
<alany>        ::= <névelő> <főnév> | <névelő> <melléknév> <főnév>
<névelő>       ::= A | Egy
<főnév>        ::= macska | kutya
<melléknév>    ::= bozontos | kerge
<állítmány>    ::= eszik | iszik | alszik
```

2.4. Nyelvtani transzformációk

Ahogyan korábban be lett vezetve, B szakirányon az elmélet leginkább a fordítóprogramok írásához legszükségesebb ismereteket adja át, emiatt a most következőket csak 3-as típusú nyelvtanokra, nyelvekre fogalmazzuk meg, ugyanis ezen nyelvek teszik lehetővé, hogy

2.4.1. definíció (Nyelvtani transzformáció). *A nyelvtani transzformáció olyan eljárás, amely egy G grammatikából egy másik G' grammatikát készít.*

2.4.2. definíció (Ekvivalens nyelvtani transzformáció). *Ekvivalens nyelvtani transzformációról beszélünk, ha minden G nyelvtanra és az ő G' transzformáltjára igaz, hogy $L(G) = L(G')$.*

2.4.1. Epszilon-mentesítés (ε-mentesítés)

A fordítóprogramok szempontjából fontos transzformációnk az ún. ***ε-mentesítés***.

2.4.1. tétel (ε-mentesítés). *Minden $G = (N, T, P, S)$* ***környezetfüggetlen*** *(2-es típusú) nyelvtanhoz megkonstruálható egy vele ekvivalens $G' = (N', T', P', S')$* ***környezetfüggetlen*** *nyelvtan úgy, hogy P'-ben nincs $A \longrightarrow \varepsilon$ alakú szabály, kivéve ha $\varepsilon \in L(G)$, mert akkor $S' \longrightarrow \varepsilon \in P'$, de ekkor S' nem szerepelhez szabály jobb oldalán.*
Formális(abb)an:

$$\forall G = (N, T, P, S) \in \mathcal{G}_2, \exists G' = (N', T', P', S') \in \mathcal{G}_2, L(G') = L(G):$$

- *$\varepsilon \notin L(G) \Longrightarrow$ nincs olyan szabály P'-ben, amely „$A \longrightarrow \varepsilon$" alakú lenne,*
- *$\varepsilon \in L(G) \Longrightarrow S' \longrightarrow \varepsilon \in P'$, de ekkor S' nem szerepelhet más szabály jobb oldalán.*

Bizonyítás. A bizonyítás több lépésből áll.

1.) Határozzuk meg, hogy mely nemterminálisokból vezethető le az üres szó!

$$H := \left\{ A \in N \;\middle|\; A \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \varepsilon \right\}.$$

Ehhez definiáljuk az alábbi H_i halmazokat ($i \geq 1$):

$$H_1 := \{A \in N \mid \exists A \longrightarrow \varepsilon \in P\},$$
$$H_{i+1} := H_i \cup \{A \in N \mid \exists A \longrightarrow w \in P \wedge w \in H_i^*\}.$$

Ebből nyilvánvalóan teljesül a következő összefüggés:

$$H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_i \subseteq H_{i+1}.$$

Mivel $\forall i \geq 1 : H_i \subseteq N$ és N véges halmaz, ezért egy $k \in \mathbb{N}$ indextől kezdődően biztosan azonosak lesznek a halmazok, azaz

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N} : H_k = H_{k+i}.$$

Így legyen $H := H_k$.

(*Megjegyzés*. Ennek a részletesebb belátása az [1.] jegyzet 16. oldalán elolvasható.)

Ekkor látható, hogy

$$A \in N \wedge A \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \varepsilon \iff A \in H.$$

Ennek következménye, hogy

$$\varepsilon \in L(G) \iff S \in H.$$

2.) Alakítsuk át H ismeretében a grammatika szabályait a kellő alakúra.

(a) $\boxed{S \notin H}$: $A \longrightarrow v' \in P'$ akkor és csak akkor, ha $v' \neq \varepsilon$ és $\exists A \longrightarrow v \in P$ úgy, hogy v'-t a v-ből úgy kapjuk meg, hogy elhagyunk nulla vagy több H-beli nemterminálist v-ből.

(b) $\boxed{S \in H}$: A korábbi szabályhoz hozzávesszük még a következő két szabályt:

$$S' \longrightarrow \varepsilon \mid S$$

ahol $S' \notin N$ és S' a G' nyelvtan új startszimbóluma. $\square$

Megjegyzés. A tételt ugyan 2-es típusú nyelvtanokra mondtuk ki, de 3-as típusúakra is tökéletesen működik.

2.4.2. Nyelvek normálformája

A négy nyelvtani típusból háromnak létezik ún. **normálformá**ja. Ezek a normálformák olyan alakra hozzák az adott típusú nyelvtanok szabályait, melyek egyrészt könnyebben felismerhetővé, egyértelműbbé teszik a típusát, másrészt ez az alak nagy segítségünkre válik, amikor az automatákkal is elkezdünk foglalkozni. Eme ekvivalens transzformációkra gondolhatunk úgy, mint amikor egy egyenletet rendezünk át: a végeredmény nem változik, csupán az alakja. Hasonlóan, a normálformára hozott nyelvtanok az eredeti nyelvet generálják. A tantárgy keretein belül a 2-es és 3-as típusú grammatikák normálformáját fogjuk részletesebben tárgyalni, ugyanis ezeket tudjuk hasznosítani fordítóprogramok írásánál.

Az egyes **nyelvtani típusok normálformái** a következők.

1. típus. Kuroda-normálforma (*nem foglalkozunk vele*).

2. típus. Chomsky-normálforma és a Greibach-normálforma.

3. típus. 3-as típusú nyelvek normálformája.

Az algoritmusokat a későbbi alfejezetekben részletezzük.

2.5. Automaták

Formális nyelvtannal nyelvet szabályrendszerrel, azaz **generatív módon** adhatunk meg. Ez a megközelítés abból a szemszögből közelíti meg a nyelv szavait, hogy milyen „törvényszerűségekkel” lehet őket levezetni.

Azonban a gyakorlatban számtalanszor van arra szükségünk, hogy *adott szóról kell eldöntenünk, hogy a nyelvnek része-e.* Ezt eldönteni pusztán a produkciós szabályokkal nem mindig könnyű eldönteni. Jó lenne, ha úgymond „*automatizálhatnánk*” ezen kérdéskörnek a vizsgálatát. Egy olyan konstrukcióra, eszközre van szükségünk, ami egy „*igen*” vagy „*nem*” válasszal visszatérve eldönti, hogy a bemeneti sztring része-e a nyelvnek.

Pontosan erre a célra hozták létre az automatákat. Az ***automaták*** betűről betűre megvizsgálják, hogy valid-e a nyelv szabályrendszere szerint az *inputszalag*on beolvasott szó és az eredménnyel visszatérnek. Más szóval **akceptív módon** határozza meg a nyelv szavait, így beszélhetünk automata által generált nyelvről.

Mindegyik típushoz tartozik, tartoznak bizonyos típusú automaták. Róluk a megfelelő nyelvtani típusokat feldolgozó fejezetekben lesz bővebben szó. Emellett, mivel a grammatikák és az automaták annyira szorosan kapcsolódnak egymáshoz, bizonyos típusokra léteznek *algoritmusok*, melyekkel *grammatikát automatává lehet konvertálni és fordítva.*

2.6. Zártsági tételek

Emlékeztető. **Reguláris műveletek**nek neveztük az alábbi, nyelvek felett értelmezett műveleteket: *unió*, *konkatenáció*, *lezárás*.

Legyen φ egy n-változós nyelvi művelet, azaz ha $L_1, \ldots, L_n$ nyelvek, akkor $\varphi(L_1, \ldots, L_n)$ is nyelv.

2.6.1. definíció (Nyelvcsalád zártsága műveletre nézve). *Az $\mathcal{L}$ nyelvcsalád zárt a φ műveletre nézve, ha $L_1, \ldots, L_n \in \mathcal{L}$ estén $\varphi(L_1, \ldots, L_n) \in \mathcal{L}$.*

2.6.1. tétel. *Az $\mathcal{L}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ nyelvcsaládok mindegike **zárt a reguláris műveletekre nézve**.*

Bizonyítás. Műveletenként. Az unió kivételével mindegyiknél csak $i = 3$-ra látjukbe – a mi szempontunkból ennyi bőven elég.

(*Megjegyzés*. A többi nyelvcsaládra a régi jegyzet 1.9. fejezetében található részletesebb leírás (27. oldal).)

Legyen $G = (N, T, P, S)$ az L nyelvhez tartozó grammatika, $G' = (N', T, P', S')$ legyen az L'-hez tartozó grammatika, valamint teljesüljön, hogy $N \cap N' = \emptyset$ és G, G' azonos típusúak.

A) <u>Unió</u>: Vezessünk be egy új startszimbólumot! Az alapkonstrukciónk:

$$G_\cup := \left(N \cup N' \cup \{S_{\text{új}}\}, T, P \cup P' \cup \{S_{\text{új}} \longrightarrow \text{új szabály jobb oldala}\}, S_{\text{új}}\right).$$

(a) $\boxed{i = 0, 2, 3}$: Legyen S_0 az új startszimbólum ($S_0 \notin (N \cup N')$). Az alábbi alapkonstrukcióval fogunk dolgozni.

$$G_\cup := \left(N \cup N' \cup \{S_0\}, T, P \cup P' \cup \{S_0 \longrightarrow S \mid S'\}, S_0\right).$$

Látható, hogy $G_\cup$ típusa megegyezik G és G' típusával, és $L(G) \cup L(G') = L(G_\cup)$. Röviden, nem kell attól tartanunk, hogy az ε-szabály elveszne.

(b) $\boxed{i = 1}$: Ebben az esetben már elveszhet az ε, ha $\varepsilon \in (L \cup L')$. Ekkor az előbbi módon elkészített grammatikában nem teljesül a KES.

Tekintsük az $L_1 := L \setminus L_\varepsilon$ és $L_2 := L' \setminus L_\varepsilon$ nyelveket, melyeket rendre G_1 és G_2 nyelvtanok generálnak (melyek 1-es típusúak).

Készítsük el $G_\cup$-t az előbbi módon, majd vezessünk be egy S_1 új kezdőszimbólumot és adjuk a szabályhalmazhoz az

$$S_1 \longrightarrow \varepsilon \mid S_0$$

szabályokat (ez két szabály, tömörítve felírva).

B) Konkatenáció: Csak $i = 3$-ra.

A P szabályhalmazból megkonstruálunk egy P_1 szabályhalmazt úgy, hogy minden $A \longrightarrow u$ alakú szabályt felcserélünk egy $A \longrightarrow uS'$ alakú szabályra, a többi szabályt változatlanul hagyjuk.

Ekkor a

$$G_C := (N \cup N', T, P_1 \cup P', S)$$

grammatika 3-as típusú és generálja az $L(G)L(G')$ nyelvet.

C) Lezárás: Csak $i = 3$-ra.

Legyen S_0 új szimbólum, azaz $S_0 \notin N$. Definiáljuk a P_1 szabályhalmazt úgy, hogy minden $A \longrightarrow u$ alakú szabályt felcserélünk egy $A \longrightarrow uS_0$ alakú szabályra és ezek legyenek a P_1 elemei. Ekkor a

$$G_* := (N \cup \{S_0\}, T, P_1 \cup P \cup \{S_0 \longrightarrow \varepsilon \mid S\}, S_0)$$

grammatika generálja az L^* nyelvet. □

3. fejezet

Reguláris (3-as típusú) nyelvtanok

3.1. Reguláris nyelvek

A 3-as nyelvcsalád nyelveit az alábbi módokon írhatjuk le:

- 3-as típusú grammatikával,
- reguláris kifejezéssel,
- véges determinisztikus automatával (VDA),
- véges nemdeterminisztikus automatával (VNDA).

Megjegyzés. A programozási nyelvek lexikális egységei a 3-as nyelvcsaládba tartoznak.

3.1.1. állítás.

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{reg} = \mathcal{L}_{VDA} = \mathcal{L}_{VNDA}.$$

Bebizonyítható az állítás. A régi jegyzetben több tétel következményeként meggondolható. Emellett a későbbiekben be is fogjuk látni.

3.1.1. definíció (Reguláris nyelvek).

- *az **elemi nyelvek**: $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{a\}$, ahol $a \in U$, azaz egy tetszőleges betű*
- *azon nyelvek, melyek az elemi nyelvekből az **unió**, a **konkatenació** és a **lezárás** műveletek **véges számú alkalmazásával** állnak elő;*
- *nincs más reguláris nyelv*

Példa. $\{\{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{b}\}\}^* \{\mathtt{b}\} = \{u\mathtt{b} \mid u \in \{a, \mathtt{b}\}^*\}$.

3.1.1. tétel. *Minden L reguláris nyelvhez megadható egy $G \in \mathcal{G}_3$ 3-as típusú grammatika, amelyre $L = L(G)$. ($\mathcal{L}_{reg} \subseteq \mathcal{L}_3$)*

Bizonyítás. Az elemi nyelvekhez adhatunk 3-as típusú nyelvtanokat.

- $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}\}, \{S \longrightarrow \mathtt{a}S\}, S) \quad L(G) = \emptyset.$
- $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}\}, \{S \longrightarrow \varepsilon\}, S) \quad L(G) = \{\varepsilon\}.$
- $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}\}, \{S \longrightarrow \mathtt{a}\}, S) \quad L(G) = \{\mathtt{a}\}.$

Korábban láttuk, hogy az $\mathcal{L}_3$ *nyelvcsalád zárt a reguláris műveletekre nézve.* Az elemi nyelvek grammatikáiból kiindulva megkonstruálható a reguláris műveletekhez tartozó grammatika konstrukciókkal a megfelelő 3-as típusú grammatika bármely összetett reguláris nyelvhez. □

3.1.2. definíció (Reguláris kifejezés).

- *az **elemi reguláris kifejezések**:* $\emptyset$, ε, $a \quad (a \in U)$
- *ha* R_1 *és* R_2 *és* R *reguláris kifejezések akkor*
  - *i)* $(R_1|R_2)$*;*
  - *ii)* (R_1R_2)*;*
  - *iii)* $(R)^*$ *is **reguláris kifejezések**.*
- *a **reguláris kifejezések halmaza** a legszűkebb halmaz, melyre a fenti két pont teljesül.*

Vigyázat! A reguláris kifejezések önmagukban nem reguláris nyelvek, azaz a reguláris kifejezés nem ugyanaz, mint a reguláris nyelv. Jelölésben az alábbi módon különböztetjük meg:

L_R jelöli az R reguláris kifejezéshez tartozó nyelvet.

Az elemi nyelvekre kiterjesztve:

$$\begin{aligned} L_\emptyset &= \emptyset, \\ L_\varepsilon &= \{\varepsilon\}, \\ L_a &= \{a\} \quad (a \in U). \end{aligned}$$

Valamint, ha Q és R reguláris kifejezések, akkor:

$$\begin{aligned} L_{(Q|R)} &= L_Q \cup L_R \\ L_{(QR)} &= L_Q L_R \\ L_{(R)^*} &= (L_R)^* \end{aligned}$$

A gyakorlatban sokszor nem számít ez a különbségtétel, ezért előfordulhat, hogy a jegyzetben a világosság érdekében, de a pontosság rovására ez a „szintaktikai cukormáz” fogja jelenteni a nyelvet.

A műveletek **prioritási sorrend**je növekvően:

unió $<$ konkatenáció $<$ lezárás.

A zárójelek elhagyhatók a reguláris kifejezésekből a prioritásoknak megfelelően.

3.2. 3-as típusú nyelvtanok normálformája

Ahogy korábban bevezettük, a nyelvtanok típusaihoz léteznek ún. **normálformák**, amelyekre gondolhatunk úgy, mint speciális formára hozott nyelvtanok, melyek ekvivalensek az eredetivel. Ezek sokszor megkönnyítik a nyelvtan vizsgálatát.

A 3-as típusú nyelvtanok normálformája az alábbi alakkal rendelkeznek.

3.2.1. tétel. *Minden 3-as típusú nyelv generálható olyan grammatikával, amelynek szabályai az alábbi alakokat ölthetik fel:*

- $\boxed{A \longrightarrow aB}$ *, ahol* $A, B \in N$ *és* $a \in T$ *(egyetlen szimbólum),*
- $\boxed{A \longrightarrow \varepsilon}$ *, ahol* $A \in N$.

A normálformát a 3-as típusú nyelvtanok esetében azért szeretjük, mert **könnyű belőle automatát készíteni**. Az, hogy a normálformára hozott nyelvtanból hogyan tudunk automatát előállítani, azt a későbbiekben tárgyaljuk. Egyelőre megnézzük azt az **algoritmus**t, mellyel **normálformára hozhatunk 3-as típusú nyelvtanokat**.

A **3-as normálformára hozás algoritmusa** 3 lépésből áll.

I. Hosszredukció

Elhagyjuk az $A \longrightarrow \mathtt{a}_1 \dots \mathtt{a}_k B$ alakú szabályokat, ahol $k \geq 2$ és

$$\forall i \in [1..k] : \mathtt{a}_i \in T,$$

valamint teljesül, hogy $A \in N$ és $B \in N \cup \{\varepsilon\}$. Tehát a jobb oldalon nem szükséges, hogy nemterminális szimbólum is szerepeljen.

Helyettesítsük a következő szabályokkal:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathtt{a}_1 Z_1, && \text{ahol } Z_1 \notin N \rightarrow \text{ új terminális} \\ Z_1 &\longrightarrow \mathtt{a}_2 Z_2, && \text{ahol } Z_2 \notin (N \cup \{Z_1\}) \\ Z_2 &\longrightarrow \mathtt{a}_3 Z_3, && \text{ahol } Z_2 \notin (N \cup \{Z_1, Z_2\}) \\ &\dots \\ Z_{k-1} &\longrightarrow \mathtt{a}_k B \end{aligned}$$

Vagyis minden szabályra új nemterminálisokat vezetünk be. Azért hívjuk hosszredukciónak ezt a lépést, mert a szabály jobb oldalának $\mathtt{a}_1 \dots \mathtt{a}_k \in T^k \subset T^*$ „szeletéből” olyan szabályokat hozunk létre, melyek már $\mathtt{a}_i \in T$ $(i \in [1..k])$ terminálisokat tartalmaznak.

II. Befejező szabályok átalakítása

Elhagyjuk az $A \longrightarrow \mathtt{a}$ alakú szabályokat[a], ahol $\mathtt{a} \in T$ és $A \in B$. Ehhez felveszünk egy új nemterminálist (jelöljük E-vel), ami lehet közös minden befejező szabály esetén.

Innen az alábbi új szabályokat felvesszük a transzformált nyelvtanunkba:

$$A \longrightarrow \mathtt{a}E \quad \text{és} \quad E \longrightarrow \varepsilon.$$

III. Láncmentesítés

Elhagyjuk az $A \longrightarrow B$ alakú szabályokat, ahol $A, B \in N$. Más szóval, csak nemterminális áll a szabály jobb oldalán.

Első lépésben meghatározzuk minden $A \in B$ esetén a

$$H(A) := \left\{ B \in N \;\middle|\; A \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} B \right\}$$

halmazokat. Ehhez iteratívan definiáljuk a H_i halmazokat ($i \geq 1$):

$$\begin{aligned} H_1(A) &:= \{A\}, \\ H_{i+1}(A) &:= H_i(A) \cup \{B \in N \mid \exists C \in H_i(A) \land C \longrightarrow B \in P\}\,. \end{aligned}$$

Ha elkészültünk a halmazokkal, azt mondhatjuk, hogy

$$\exists k \in \mathbb{N}^+ : H_1(A) \subseteq H_2(A) \subseteq \cdots \subseteq H_k(A) = H_{k+1}(A).$$

Ekkor legyen $H(A) := H_k(A)$.

Ezután felvesszük a transzformált nyelvtanba az $A \longrightarrow X$ szabályokat, ha

$\exists B \in H(A), B \longrightarrow X \in P$, ahol $X \in (N \cup T)^*$ és X nem csak egyetlen terminális.

[a] Ezeket *befejező szabályok*nak nevezzük.

3.3. Véges automaták

3.3.1. definíció. ***Véges determinisztikus automatá****nak nevezzük az*

$$A = (Q, T, \delta, q_0, F)$$

rendezett ötöst, ahol

- Q *az* ***állapotok halmaza*** $(0 < |Q| < \infty)$,
- T *a* ***bemeneti szimbólumok ábécéje***,
- $\delta : Q \times T \to Q$ *leképezés az* ***állapot-átmeneti függvény***,
- $q_0 \in Q$ *a* ***kezdeti állapot***,
- $F \subseteq Q$ *az* ***elfogadóállapotok halmaza*** *(vagy* ***végállapotok halmaza****)*

Megjegyzés. Fontos, hogy *véges determinisztikus automata* esetén a δ függévny értelmezett minden $(q, a) \in Q \times T$ párra, azaz

$$\forall (q, a) \in Q \times T, \exists! p \in Q : \delta(q, a) = p.$$

Ha ez nem teljesül, azaz egy $(q, a) \in Q \times T$ párhoz több $p \in Q$ állapot is tartozhat, akkor *véges* **nem***determinisztikus automatá*ról beszélünk (*VNDA* vagy *NDA*).

3.3.2. definíció. ***Véges nemdeterminisztikus automatá****nak nevezzük az*

$$A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$$

rendezett ötöst, ahol

- Q *az* ***állapotok halmaza*** $(0 < |Q| < \infty)$,
- T *a* ***bemeneti szimbólumok ábécéje****,*
- $\delta : Q \times T \to \mathcal{P}(Q)$ *leképezés az* ***állapot-átmeneti függvény****,*
- $Q_0 \subseteq Q$ *a* ***kezdőállapotok halmaza****,*
- $F \subseteq Q$ *az* ***elfogadóállapotok halmaza*** *(vagy* ***végállapotok halmaza****)*

Felhívjuk a figyelmet arra a pár apró, ugyan lényekes különbségre, ami ebben a definícióban található.

- Egyrészt, a egyetlen kezdőállapot helyett kezdőállapotok halmazáról beszélünk.
- Az állapot-átmenetek függvénye a Q hatványhalmazába képez (amit $\mathcal{P}(Q)$-val jelölünk). Ez engedi meg, hogy egy adott (q, a) párhoz több állapotot is hozzárendelhessünk.

A VNDA a VDA általánosításának tekinthető.

Hogy kövessük az eddig bevezetett konvenciókat, az állapot-átmeneteket is felírhatjuk olyan szintaxissal, amellyel a produkciós szabályokat írtuk fel.

$$\delta(q, a) = p \quad \Longleftrightarrow \quad qa \longrightarrow p.$$

Az automaták témakörében is értelmezzük a *mondatform*ának megfeleltethető fogalmat, amit **konfigurációnak** nevezünk.

3.3.3. definíció (Konfiguráció). *A* $v \in QT^*$ *egy konfigurációja egy VDA-nak, ha az aktuális állapotot és az inoput hátralévő részét tartalmazza, azaz* $v = qu$.

Hasonlóan, a *közvetlen és közvetett levezetés*nek is létezik megfelelője. Ezeket **közvetlen**, ill. **közvetett redukció**nak nevezzük. A redukció név arra utal, hogy az inputszalagról beolvasott szöveg hossza egyre csökken.

3.3.4. definíció (Közvetlen redukció). *Legyen* $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ *egy VDA és legyenek* $u, v \in Q^*$ *konfigurációk.*
Azt mondjuk, hogy az A *automata az* u *konfigurációt a* v *konfigurációra* ***redukálja közvetlenül****, ha*

$$\exists \delta(q, a) = p \text{ szabály} \wedge \exists w \in T^* : u = qaw \wedge v = pw.$$

Jele: $u \underset{A}{\Longrightarrow} v$.

Alternatív módon: van olyan $qa \longrightarrow p$ szabály és van olyan $w \in T^*$ szó, amelyre

$$u = \mathbf{qa}w \wedge v = \mathbf{p}w.$$

A vastag kijelölés nem azt jelenti, hogy vektorok lennének, hanem hogy szemléletesebben kiemeljem a „csere” helyét.

A **közvetett redukció**t gyakran csak egyszerűen **redukció**nak nevezzük.

3.3.5. definíció (Redukció vagy közvetett redukció). *Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges automata az $u \in QT^*$ konfigurációt a $v \in QT^*$ konfigurációra* ***redukálja****, ha*

- *ha $u = v$, vagy*
- *ha $u \neq v$, akkor $\exists z \in QT^* : u \overset{*}{\underset{A}{\Longrightarrow}} z \wedge z \underset{A}{\Longrightarrow} v$.*

Jele: $u \overset{*}{\underset{A}{\Longrightarrow}} v$.

Ahogy a grammatikáknál is, itt is értelmezzük az automata által elfogadott nyelvet. Figyeljük meg a szóhasználatot: az automata továbbra sem generálja, hanem elfogadja a szavakat (akceptív módon közelíti meg a szóproblémát).

3.3.6. definíció (Automata által elfogadott nyelv). *Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges automata által elfogadott nyelv alatt az*

$$L(A) := \left\{ u \in T^* \;\middle|\; q_0 u \overset{*}{\underset{A}{\Longrightarrow}} p \wedge p \in F \right\}$$

szavak halmazát értjük.

A definíció azt jelenti, hogy az automata a kezdőállapotból (q_0-ból) indulva végig olvasva az inputot elfogadóállapotba jut (azaz $p \in F$).

3.3.1. 3-as típusú nyelvek kapcsolata a véges automatákkal

3.3.1. tétel. *Minden 3-as típusú L nyelvhez megadható egy véges nemdeterminisztikus automata, és fordítva; minden nemdeterminisztikus automata 3-as típusú nyelvet ismer fel.*

$$\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_{VNDA} \quad \text{és} \quad \mathcal{L}_{VNDA} \subseteq \mathcal{L}_3$$

Bizonyítás*.* // Kidolgozni.

3.3.2. tétel. *Minden $A = (Q, T, \delta, Q_0, F)$ nemdeterminisztikus automatához megadható egy $A' = (Q', T, \delta', q_0', F')$ véges determinisztikus automata, hogy az általuk generált nyelvek ekvivalensek, azaz*

$$\forall A = (Q, T, \delta, Q_0, F), \exists A' = (Q', T, \delta', q_0', F') : L(A') = L(A).$$

$$\mathcal{L}_{VNDA} \subseteq \mathcal{L}_{VDA}$$

Bizonyítás*.* // Kidolgozni.

3.3.3. tétel (Kleene tétele).

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_{reg}$$

Bizonyítás. // Kidolgozni.

3.3.2. Minimális véges determinisztikus automata

3.3.7. definíció (Minimális véges determinisztikus automata). *Az A véges determinisztikus automata **minimális állapotszámú**, ha nincs olyan A' véges determinisztikus automata, amely ugyanazt a nyelvet ismeri fel, mint A, de A' állapotainak száma kisebb, mint A állapotainak száma.*

$$\nexists A' = (Q', T, \delta', q_0', F') \text{ véges det. autom.} : L(A') = L(A') \wedge |Q'| < |Q|$$

3.3.4. tétel. *Az L reguláris nyelvet felismerő **minimális** véges determinisztikus automata az izomorfizmus erejéig **egyértelmű**.*

Bizonyítás. // Kidolgozni.

3.3.8. definíció (Elérhető állapot). *Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges determinisztikus automata q **állapot**át **elérhető**nek mondjuk, ha*

$$\exists u \in T^* : q_0 u \overset{*}{\underset{A}{\Longrightarrow}} q.$$

3.3.9. definíció (Összefüggő VDA). *Az $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ véges determinisztikus automatát **összefüggő**nek mondjuk, ha minden állapota elérhető a kezdőállapotból.*

3.3.10. definíció (Ekvivalens állapotok). *Legyen $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ egy VDA és $q, p \in Q$ állapotok. Ekkor q és p **ekvivalens állapotok**, ha*

$$\forall u \in T^* \text{ szóra teljesül, hogy } qu \overset{*}{\underset{A}{\Longrightarrow}} r \text{ és } pu \overset{*}{\underset{A}{\Longrightarrow}} r' \text{ esetén}$$
$$r \in F \text{ akkor és csak akkor, ha } r' \in F.$$

Jele: $\boxed{q \sim p}$.

3.3.1. állítás. *Ha q és p ekvivalens, akkor $qa \longrightarrow s$ és $pa \longrightarrow t$ esetén s és t is ekvivalens állapotok $\forall a \in T$ betűre.*

3.3.11. definíció (i-ekvivalens állapotok). *Legyen $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ egy VDA és $q, p \in Q$ állapotok. Az mondjuk, hogy q és p* ***i-ekvivalens állapotok****, ha*

$$\forall u \in T^* \text{ szóra, ahol } \ell(u) \leq i \text{ teljesül, hogy}$$

$$qu \underset{A}{\overset{*}{\Longrightarrow}} r \text{ és } pu \underset{A}{\overset{*}{\Longrightarrow}} r' \text{ esetén } r \in F \text{ akkor és csak akkor, ha } r' \in F.$$

Jele: $\boxed{q \sim^i p}$ *vagy* $\boxed{q \overset{i}{\sim} p}$.

3.3.1. lemma.

$$q \overset{i+1}{\sim} p \iff \forall a \in T, qa \longrightarrow s \wedge pa \longrightarrow t : s \overset{i}{\sim} t.$$

Szavakban: legfeljebb i hosszú szavak esetén a két állapot nem megkülönböztethető.

4. fejezet

A 2-es és 3-as nyelvcsalád viszonya

A következő tételek szükséges feltételeket fogalmaznak meg a 3-as típusú nyelvekre. Vannak nyelvek, amelyek bizonyíthatóan nem teljesítik a feltételeket, de 2-es típusú grammatikával generálhatók.

4.1. Szükséges feltétel 3-as típusú nyelvekre

4.1.1. lemma (Kis Bar-Hiller lemma). *$\forall L \in \mathcal{L}_3$ nyelvhez $\exists n \in \mathbb{N}^+$* ***nyelvfüggő konstans****, hogy $\forall u \in L$, ahol $\ell(u) \geq n$ szó esetén van u-nak olyan $u = xyz$ felbontása, amelyre*
- $\ell(xy) \leq n$,
- $y \neq \varepsilon$,
- $\forall i \in \mathbb{N} : xy^iz \in L$.

Bizonyítás. // Kidolgozni.

4.2. Szükséges és elégséges feltétel 3-as típusú nyelvekre

4.2.1. definíció (Maradéknyelv). *Legyen L egy T ábácé felett értelmezett nyelv ($L \subseteq T^*$). Az L nyelv egy $p \in T^*$* ***szóra értelmezett maradéknyelve*** *a következő:*

$$L_p := \{u \in T^* \mid pu \in L\}.$$

4.2.1. tétel (Myhill–Nerode-tétel). *Egy L nyelv akkor és csak akkor 3-as típusú, ha a véges számú maradéknyelve van, azaz*

$$L \in \mathcal{L}_3 \iff |\{L_p \mid p \in T^*\}| < \infty.$$

Megjegyzés. A szavakon egy osztályozást végzünk az adott nyelvtől függően.

Bizonyítás. // Kidolgozni.

5. fejezet

Környezetfüggetlen (2-es típusú) nyelvtanok

5.1. A szóprobléma kérdése

A *formális nyelvek* témakörében az egyik központi kérdésünk, hogy adott G grammatika és adott $u \in T^*$ szó estén teljesül-e, hogy $u \in L(G)$. Vagyis, hogy a G nyelvtan által generált nyelvben benne van-e az u szó. Szerencsére, a 2-es típusú nyelvtanok esetében vannak eszközeink ezen kérdésnek eldöntésére.

Ez az úgynevezett **szintaxisfa**, vagy **levezetési fa**. Az elnevezés több értelmet nyer, ha felidézzük a Backus–Naur-jelölést.

5.1.1. definíció (Szintaxisfa). *Legyen $G = (N, T, P, S) \in \mathcal{G}_2$ grammatika. A t nemüres fát G* ***feletti levezetési (szintaxis) fának*** *nevezzük, ha*

- *pontjai $T \cup N \cup \{\varepsilon\}$ elemeivel vannak címkézve;*
- *belső pontjai N elemeivel vannak címkézve;*
- *ha egy belső pont címkéje A, a közvetlen leszármazottjainak címkéi pedig balról jobbra olvasva $X_1, X_2, \ldots, X_k$, akkor $A \longrightarrow X_1X_2 \ldots X_k \in P$.*
- *az ε-nal címkézett pontoknak nincs testvére.*

5.1.1. tétel. *Ha adott G grammatika esetén $u \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha u-hoz* ***megadható egy szintaxisfa****.*

Megjegyzés. Az u-hoz tartozó szintaxisfa gyökere S és a leveleit *balról jobbra* összeolvasva az u szót kapjuk.

5.1.1. állítás. *Minden szintaxisfához megadható egy levezetés és fordítva.*

5.1.2. definíció (Egyértelmű nyelvtan). *Egy $G \in \mathcal{G}_2$ nyelvtan* ***egyértelmű****, ha minden $u \in L(G)$ szóhoz egyetlen szintaxisfa tartozik.*

5.2. 2-es típusú nyelvtanok normálformája

A Chomsky-hierarchia bevezetésénél kimondtuk az ε-**mentesítés** tételét, amit 2-es és 3-as típusú nyelvtanokon elvégezhető transzformáció.

5.2.1. definíció (Chomsky-normálforma). *Egy $G = (N, T, P, S) \in \mathcal{G}_2$ nyelvtant* ***Chomsky-normálformájú****nak mondunk, ha szabályai*

- $\boxed{A \longrightarrow a}$ *, ahol $A \in N$ és $a \in T$ vagy*
- $\boxed{A \longrightarrow BC}$ *alakúak, ahol $A, B, C \in N$.*
- $\boxed{S \longrightarrow \varepsilon}$ *, de ekkor S nem fordul elő egyetlen szabály jobboldalán sem.*

5.2.1. tétel. *Minden* ***környezetfüggetlen*** *grammatikához megkonstruálható egy vele ekvivalens* ***Chomsky normálformájú*** *grammatika.*

Megjegyzések.

- A 2-es típusú grammatikák Chomsky normálformára hozásának algoritmusa nem a tananyag része.[1]
- Chomsky normálformájú grammatikákhoz megadható olyan elemző program, amely $O(n^3)$ időben eldönti a szóproblémát (*Cocke–Younger–Kasami-algoritmus*).
- Bizonyos állítások bizonyítását elég elvégezni a normálformájú grammatikákra.

A korábban 3-as típusú nyelvtanokra megfogalmazott *kis Bar-Hiller lemmá*t megfogalmazzuk környezetfüggetlen nyelvekre is.

5.2.1. lemma (Nagy Bar-Hiller lemma). *$\forall L \in \mathcal{L}_2$ nyelvhez $\exists p, q \in \mathbb{N}$* ***nyelvfüggő konstans****, hogy $\forall u \in L$, ahol $\ell(u) \geq p$ szó esetén van u-nak olyan $u = vxwyz$ felbontása ($v, x, w, y, z \in T^*$), amelyre*

- *$\ell(xwy) \leq q$,*
- *$xy \neq \varepsilon$,*
- *$\forall i \in \mathbb{N} : vx^iwy^iz \in L$.*

Megjegyzések.

- A lemma **szükséges feltétel** környezetfüggetlen nyelvekre.
- A lemmát nem bizonyítjuk, de a bizonyításhoz szükséges, hogy a 2-es típusú nyelvekhez létezik Chomsky-normálformájú grammatika.

Következmény. Van olyan nyelv, amely nem környezetfüggetlen. Például

$$L := \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n > 0\} \notin \mathcal{L}_2.$$

Tegyük fel indirekt, hogy $\exists p, q$ a Bar-Hillel lemmának megfelelő konstansok. Legyen $k > p$ és $k > q$ is. Ekkor $u = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n$ és $\ell(u) > p$.

A lemma szerint az u szó $vxwyz$ alakban felbontható kell legyen, úgy, hogy $\ell(xwy) \leq q < k$ és x és y párhuzamosan beiterálható. De ekkor xy-ban nem lehet mindhárom betűből, így vwz nem lehet eleme L-nek, ami ellentmondás.

[1] A jegyzet írása idején így szólt a tanterv (2023/2024/2. félév).

5.3. Nyelvtan redukálása

A grammatikák transzformálása közben keletkezhetnek olyan szabályok, amelyek egyetlen szó levezetésében sem használhatóak.

A grammatikában lehetnek olyan nemterminálisok, amelyekből

1. nem lehet csupa nem terminálisból álló sorozatot előállítani (*zsákutcák*);
2. nem érhetők el a kezdőszimbólumból.

5.3.1. definíció (Aktív nemterminálisok). ***Aktív*** *nemterminálisok halmaza egy adott* $G = (N, T, P, S) \in \mathcal{G}_2$ *grammatika esetén:*

$$A := \left\{ X \in N \;\middle|\; X \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} u \wedge u \in T^* \right\}.$$

Inaktív (**zsákutca**) nemterminálisok: $\boxed{N \setminus A}$.

5.3.2. definíció (Elérhető nemterminálisok). ***Elérhető*** *nemterminálisok halmaza egy adott* $G = (N, T, P, S) \in \mathcal{G}_2$ *grammatika esetén:*

$$R := \left\{ X \in N \;\middle|\; S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} uXw \wedge u, w \in (T \cup N)^* \right\}.$$

Nem elérhető nemterminálisok: $\boxed{N \setminus R}$.

5.3.3. definíció (Hasznos nemterminálisok). *Egy nemterminálist* ***hasznos****nak mondunk, ha* ***aktív és elérhető****:*

$$X \in (A \cap R) \subseteq N.$$

5.3.4. definíció (Redukált nyelvtan). *Egy környezetfüggetlen grammatika* ***redukált****, ha minden nemterminálisa* ***hasznos****, azaz a grammatika* ***zsákutcamentes és összefüggő****.*

5.3.1. tétel. *Minden* $G \in \mathcal{G}_2$ *nyelvtanhoz megkonstruálható egy vele ekvivalens* ***redukált grammatika****.*

Bizonyítás. // Kidolgozni.

1. Zsákutcák meghatározása és minden olyan szabály elhagyása, amiben inaktív nemterminálisok szerepelnek.
2. Az S-ből nem elérhető nemterminálisokhoz tartozó szabályok elhagyása, azaz a grammatika összefüggővé tétele.

5.4. Veremautomaták

Elöljáróban elárultuk, hogy a szóprobléma eldönthető az összes környezetfüggetlen nyelvtan által generált nyelvre. Íme az erre vonatkozó tétel és bizonyítása.

5.4.1. tétel (Szóprobléma eldöntése). *Minden $G = (N, T, P, S) \in \mathcal{G}_2$ grammatika esetében eldönthető, hogy egy tetszőleges $u \in T^*$ szó benne van-e a G grammatika által generált nyelvben vagy sem.*

Bizonyítás. // Kidolgozni.

A szóprobléma eldönthető a környezetfüggetlen grammatikákhoz párosuló **veremautomatá**kkal, melyet az alábbi módon definiálunk.

5.4.1. definíció (Veremautomata). ***Veremautomatá****nak nevezzük az*

$$A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$$

rendezett hetest, ahol

- Z *a verem szimbólumainak ábécéje,*
- Q *az állapotok halmaza* $(0 < |Q| < \infty)$,
- T *a bemeneti szimbólumok ábécéje,*
- $\delta : Z \times Q \times (T \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z^* \times Q)$ *leképezés az állapotátmeneti függvény, ahol* δ *véges részhalmazokba képez,*
- $z_0 \in Z$ *a kezdő veremszimbólum,*
- $q_0 \in Q$ *a kezdőállapot*
- $F \subseteq Q$ *az elfogadóállapotok halmaza.*

Egy lépésben mindig kell egy jelet olvasni a verem tetejéről és csak egy jelet lehet elérni. Az input szalagról is egy jelet lehet olvasni, de nem kötelező.

Megváltoztatható az automata aktuális állapota, illetve a verem teteje. Egy lépésben egy egész sorozatot is beírhatunk a verembe.

Példák.

- $\boxed{\delta(\#, q, a) = \{(\#a, q)\}}$
  Jelentése: Ha # van a verem tetején és a betű jön az inputon, akkor **tegyük be** a-t a verembe. Ne változtassunk az állapoton.

- $\boxed{\delta(\#, q, a) = \{(\varepsilon, q)\}}$
  Jelentése: Ha # van a verem tetején és a betű jön az inputon, akkor **töröljük** #-t a veremből. Ne változtassunk az állapoton.

- $\boxed{\delta(\#, q, a) = \{(\#, r)\}}$
  Jelentése: Ha # van a verem tetején és a betű jön az inputon, akkor **ne változtassuk a verem tartalmát**. Viszont váltsunk állapotot.

- $\boxed{\delta(\#, q, \varepsilon) = \{(\#bb, q)\}}$
  Jelentése: Ha # van a verem tetején és nem olvasunk az inputról, akkor **tegyünk a verembe** két b betűt és váltsunk állapotot is.

Ahogyan azt a véges automatáknál is tapasztalhattuk, létezik az állapotátmeneteknek egy alternatív jelölése, mely követi azt a konvenciót, ahogyan a nyelvtani szabályokat írjuk fel.

- Ha $\delta(z, q, a) = \{(w_1, r_1), \ldots, (w_k, r_k)\}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$, akkor ezt a leképezést a következő szabályhalmazzal is jelölhetjük:

$$zqa \longrightarrow w_i r_i \quad i \in [1\,..\,k].$$

- Ha $\delta(z, q, \varepsilon) = \{(w_1, r_1), \ldots, (w_k, r_k)\}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$, akkor ezt a leképezést a következő szabályhalmazzal is jelölhetjük:

$$zq \longrightarrow w_i r_i \quad i \in [1\,..\,k].$$

Tehát a szabályok bal oldala ZQT vagy ZQ alakú és a jobboldala Z^*Q alakú.

Ahogyan a véges automatáknál, itt is értelmezzük a **konfiguráció** fogalmát – természetesen a megfelelő módosításokkal.

5.4.2. definíció (Konfiguráció). *Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$ egy veremautomata és legyen $\alpha \in Z^*QT^*$. Azt mondjuk α az A veremautomata egy **konfigurációja**.*

Szavakban: a konfiguráció a veremautomata egy pillanatnyi állapotát írja le.

Hasonlóan, a redukciót fogalmát is értelmezzük. Ahogy azt a véges automatáknál is tapasztalhattuk, a „sima" redukció magába foglalja a közvetett redukciót, így a kettőt nem szoktuk megkülönböztetni.

5.4.3. definíció (Közvetlen redukció). *Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$ egy veremautomata és legyen $\alpha, \beta \in Z^*QT^*$ konfigurációk.*
*Azt mondjuk, hogy az A veremautomata az α konfigurációt a β konfigurációra **redukálja közvetlenül**, ha*

$$\exists z \in Z, p, q \in Q, a \in T \cup \{\varepsilon\}, r, u \in Z^*, w \in T^*, \text{ hogy}$$

- $\boxed{zqa \longrightarrow up}$ *egy szabály δ-ban,*
- $\alpha = r\boldsymbol{zqa}w$ *és* $\beta = r\boldsymbol{up}w$.

Jele: $\boxed{\alpha \underset{A}{\Longrightarrow} \beta}$.

A vastag betűk továbbra is arra szolgálnak, hogy szemléletesebbé váljon a helyettesítés és nem vektorokat jelentenek.

5.4.4. definíció (Redukció). *Legyen $A = (Z, Q, T, \delta, z_0, q_0, F)$ egy veremautomata és legyenek $\alpha, \beta \in Z^*QT^*$ konfigurációk.*
Azt mondjuk, hogy az A veremautomata az α konfigurációt a β konfigurációra ***redukálja közvetetten****,*

- *ha vagy $\alpha = \beta$,*
- *vagy ha $\alpha \neq \beta$, akkor $\exists \alpha_1 \dots \alpha_k$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ konfiguráció sorozat, hogy $\alpha_1 = \alpha$ és $\alpha_k = \beta$ és $\forall i \in [1\,..\,k-1] : \alpha_i \underset{A}{\Longrightarrow} \alpha_{i+1}$.*

Jele: $\boxed{\alpha \overset{*}{\underset{A}{\Longrightarrow}} \beta}$.

A véges automatákkal szemben itt kétféle „nyelvet” értelmezünk attól függően, hogy megengedjük-e, hogy a verem lehet-e üres.

5.4.5. definíció (Elfogadó állapottal felismerhető nyelv).

$$L(A) := \left\{ u \in T^* \;\middle|\; \exists z_0 q_0 u \overset{*}{\underset{A}{\Longrightarrow}} wr \wedge r \in F \wedge w \in Z^* \right\}$$

Ez azt jelenti, hogy van olyan működése a veremautomatának, hogy kezdő konfigurációból indulva végig olvasva az inputot elfogadóállapotba jut.

5.4.6. definíció (Üres veremmel felismerhető nyelv).

$$N(A) := \left\{ u \in T^* \;\middle|\; \exists z_0 q_0 u \overset{*}{\underset{A}{\Longrightarrow}} r \wedge r \in F \right\}$$

Ez azt jelenti, hogy van olyan működése a veremautomatának, hogy kezdő konfigurációból indulva végig olvasva az inputot teljesen kiüríti a vermet.

A veremautomaták **determinisztikusságát** is vizsgálhatjuk.

5.4.7. definíció (Determinisztikus veremautomata). *Egy veremautomatát* ***determinisztikus****nak mondunk, ha $\forall \alpha \in Z^+QT^*$ konfiguráció esetén egyetlen konfiguráció vezethető le közvetlenül α-ból.*

Ez azt jelenti, hogy nincs két olyan szabály, amelynek azonos a bal oldala, valamint, ha zq egy bal oldal, akkor nincs zqa bal oldal egyetlen terminálisra sem.

A determinisztikus veremautomatával felismerhető nyelvek családja szűkebb, mint a nemdeterminisztikussal felismerhető nyelvek családja. Például a szimmetrikus szavak nem ismerhetők fel determinisztikus veremautomatával.

5.4.1. lemma. *Bármely A veremautomatához megadható A' veremautomata úgy, hogy $N(A') = L(A)$.*

5.4.2. lemma. *Bármely A veremautomatához megadható A' veremautomata úgy, hogy $L(A') = N(A)$.*

Megjegyzés. Ez azt jelenti, hogy ha egy nyelvhez építhető elfogadó állapottal felismerő veremautomata, akkor építhető üres veremmel felismerhető veremautomata és fordítva.

5.4.2. tétel. *Minden $L \in \mathcal{L}_2$ nyelvhez megadható egy A veremautomata úgy, hogy*

$$L = N(A), \quad \textit{azaz} \quad \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_{1V}.$$

Bizonyítás. // Kidolgozni.

5.4.3. tétel. *Minden A veremautomatához megadható egy $G \in \mathcal{G}_2$ nyelvtan úgy, hogy*

$$L(G) = N(A), \quad \textit{azaz} \quad \mathcal{L}_{1V} \subseteq \mathcal{L}_2.$$

A fordított tételt nem bizonyítjuk.

6. fejezet

Fordítóprogramok

A jegyzet első felében részletezett elméleti háttérrel felvértezve már képesek vagyunk nyelveket definiálni. A most következő részben betekintést nyerhetünk abba, hogy miként lesz a nyelvünkből egy, a számítógép által értelmezhető és végrehajtható program.

Ennek megvalósításához szükségünk lesz egy **fordítóprogram**ra (angolul *compiler*re). A fordítóprogram nem más, mint egy olyan eszköz, ami szöveges bemenetet fogad el (fájl, parancsszori bemenet, stb.), ellenőrzi azt, majd

- ha helyes a szövegünk, létrehozza a futtaható programot,
- ha nem, hibát jelez (esetleg megmutatja, *mi a hiba* és az *hol található*).

Azt a nyelvet, amit a számítógép beszél, **gépi kód**nak (*machine code*) nevezzük. Ez egy gépközeli nyelv (numerikus utasításkódok, regiszterek, memóriahivatkozások, stb.), mely erősen platformfüggő, cserébe jól optimalizált.

Ezen tulajdonságai kényelmetlenné teszik a programírást a **magas(abb) szintű nyelvek**kel ellentétben (*high(er)-level languages*), melyekben könnyebb programozni, a benne megírt kód közelebb a megoldandó problémához, emellett platform-független.

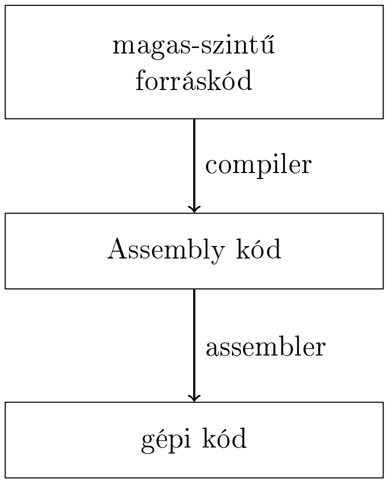
```
int sum = 0;

for (int i = 0; i < len; ++i)
{
    sum += t[i];
}
```

```
B9 00 00 00 00
B8 00 00 00 00
81 F9 0A 00 00 00
7D 06
03 04 8B
41
EB F2
```

6.1. ábra. Magas szintű nyelv és gépi kódja

Megelőlegezzük, hogy a magas szintű nyelvek és a gépi kód között helyezkedik el az **Assembly**, ami egy *ember számára olvashatóbb* változatát nyújtja a *gépi kód*nak. Kriptikus hexadecimális számok helyett rendkívül egyszerű műveletek, regiszterek, címkék, ugróutasítások állnak a programozó rendelkezésre. Azt a programot, ami egy Assembly-forráskódból gépi kódot generál, **assembler**nek nevezzük. Bővebben a róla szóló fejezetben les szó.



6.2. ábra. A forráskód állapotának szakaszai

6.1. Fajtái

A programozási nyelveket háromféle csoportba oszthatjuk attól függően, milyen stratégiát követ az adott nyelv fordítóprogramja.

6.1.1. Fordított programozási nyelvek

Léteznek az ún. **fordított programozási nyelvek** (*compiled programming languages*, 6.3. ábra), melyeknek fordítóprogramja generál egy, a gépen közvetlenül futtatható állományt. A fordítás folyamata lassabb, azonban a létrejött program végrehajtása gyors. Ha hiba merül fel, két időszakaszban jelentkezhetnek ezek.

- **Fordítási idő**ben történik (*compile time*), ha a compiler veszi észre, jelez róla vissza – ekkor megszakítja a fordítást. Az ilyen hibát fordítási idejű hibának hívjuk.
- **Futási idő**ben történik (*run time* vagy *runtime*), ha a fordítás sikeres volt, létrejött a futtatható gépi kód, de működés közben elszáll. Ezek a futási idejű hibák.

Az ilyen nyelvekben a forráskód alaposabb ellenőrzése erősen javasolt.

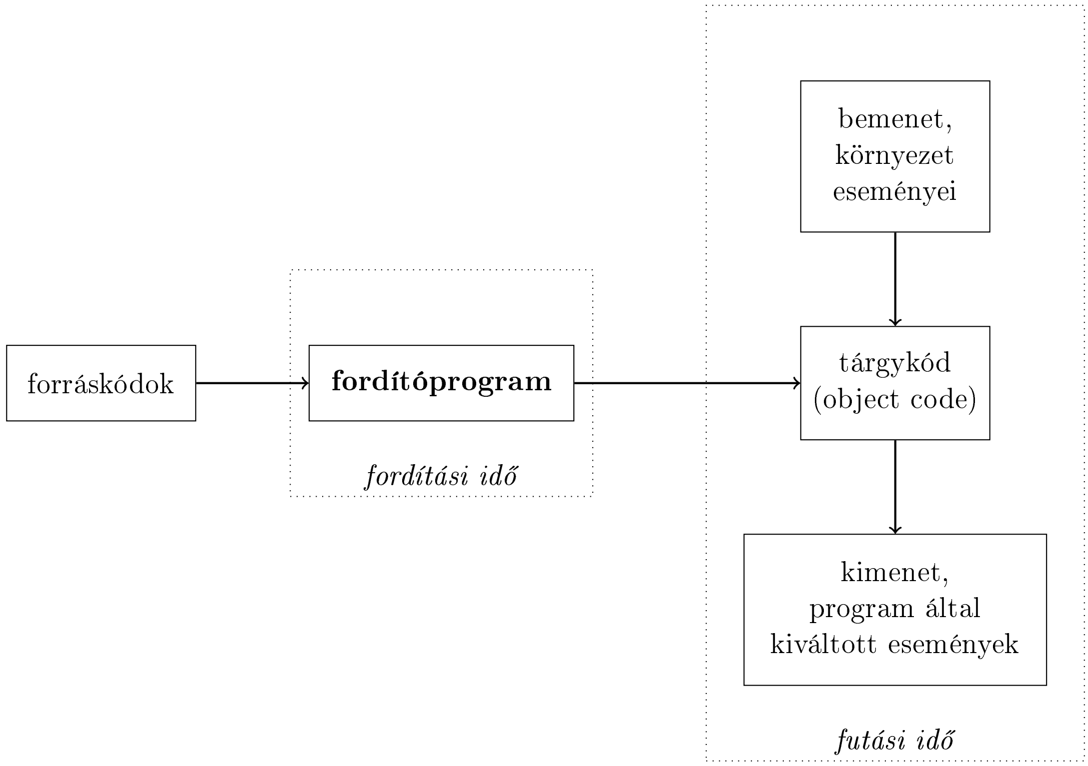
További előnye a fordított nyelveknek, hogy a fordító képes a **tárgykódot optimalizálni**, akár az adott platformra specifikusan. Hátránya sajnos ebben is rejlik, hiszen **minden platformra külön-külön le kell fordítanunk**.

Tipikusan ilyen nyelvek: C, C++, Haskell, Ada, ...

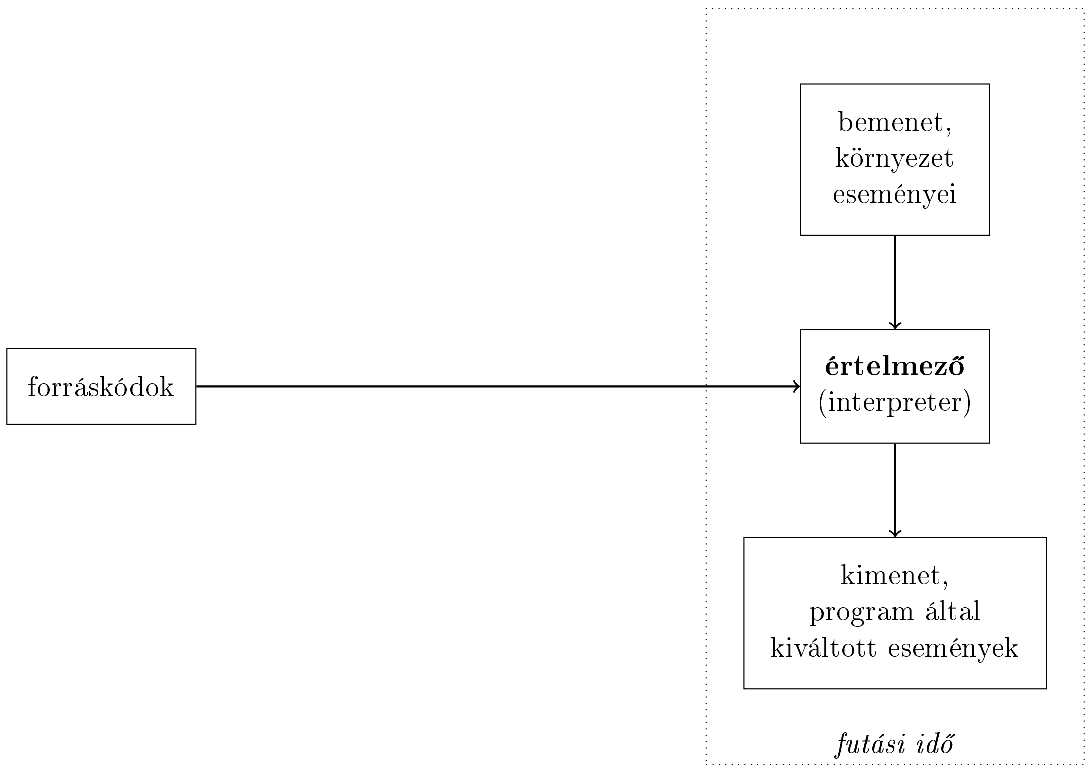
6.1.2. Értelmezett programozási nyelvek

A másik nagy csoportot képezik az **értelmezett** vagy **interpretált programozási nyelvek** (6.4. ábra). Ez némi rugalmasságot enged meg a fordított nyelvekkel szemben. Itt a fordító sorrol sorra hajtja végre az utasításokat és ott áll meg, ahol a hiba jelentkezik – azaz, **csak futási idő van**. További következménye, hogy jellemzően **jelentősen lassabb a végrehajtás**. Cserébe **minden platformon azonnal futtatható**, ahol az interpreter rendelkezésre áll.

Tipikusan ilyen nyelvek: Python, Perl, PHP, JavaScript, ...



6.3. ábra. Fordítás és végrehajtás



6.4. ábra. Értelmezés

6.1.3. Fordítás végrehajtás közben

Létezik a két stratégiának az ötvözete, a **fordítás végrehajtás közben** (angolul *just-in-time (JIT) compilation*).

Hasonlóan a fordított programozási nyelvekhez, a fordítási és futási idő elkülönül. A fordítóprogram gépi kód helyett **bájtkód**ra (*bytecode*) fordítja le a forráskódot. Ezután a **virtuális gép** (*virtual machine*) végrehajtja a bájtkód utasításait. Azonban felmerülnek bizonyos problémák.

1. Ha a virtuális gép *futási időben értelmezi* a bájtkódot, az ugyanolyan lassan történne, mint egy hagyományos értelmezett nyelv esetében.
2. Ha *végrehajtás előtt fordítjuk le* teljesen a bájtkódot gépi kódra, az túl nagy kezdeti lassulást eredményezne.

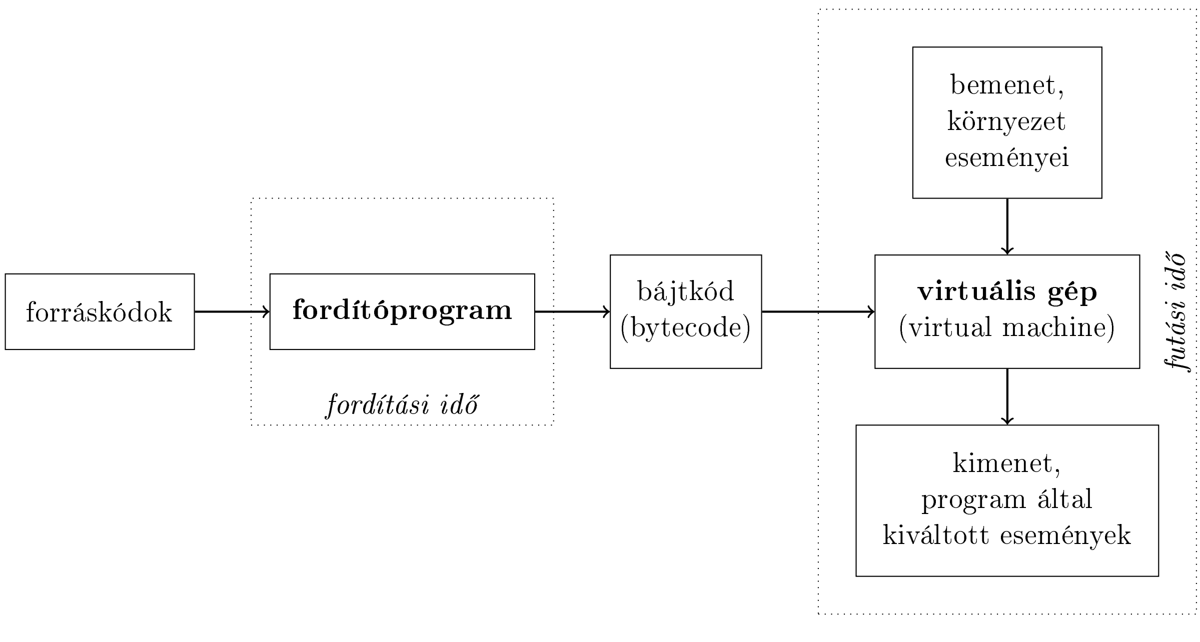
Éppen ezért a következő stratégiát követi a virtuális gép.

1. Kezdetben értelmezi, interpretálja a bájtkódot.
2. Futási időben statisztikákat gyűjt a leggyakrabban lefutó kódrészletekről. Ezeket „*hot spot*"-oknak nevezzük.
3. Ezeket lefordítja gépi kódra.
4. Így a következő alkalommal a lefordított kódrészlet fut az értelmezés helyett.

További előnye, hogy a JIT fordító futási időben gyűjtött információkat is figyelembe vehet a kódoptimalizálásnál. Ilyenekhez a klasszikus fordítóprogram nem fér hozzá!

Ugyanakkor, a bájtkódok végrehajtása jellemzően még így is lassabb a gépi kódhoz képest, de ez sepciális alkalmazási területeket leszámítva nem baj.

Tipikusan ilyen nyelvek: C#, Java.



6.5. ábra. JIT-fordítás

Nyelv	Bájtkód	Virtuális gép
C#	Common Intermediate Language (CLI)	Common Language Runtime (CLR)
Java	Java bytecode	Java Virtual Machine (JVM)

6.2. Fejlődése

- 1957: Első **Fortran compiler** – 18 emberévnyi munka
- Azóta fejlődött a **formális nyelvek és automaták elmélete**.
- Ma: A fordítóprogramok létrehozásának egy része **automatizálható** elemzőgenerátorokkal.
  - A programszöveg elemi egységekre (tokenekre) bontása
  - A programszöveg formai helyességének vizsgálata
- A további ellenőrzések és a kódgenerálás nem automatizálható, de az implemetációt **keretrendszerek** segíthetik.
- A **kódoptimalizálás** (és a hozzá szükséges elemzések) komoly kihívás.

6.3. Logikai felépítése

Két fázisból áll a fordítás: az **analízis**ből és **szintézis**ből. Az egyes részeket és alrészeket önálló fejezetek is részletezik, itt csak egy rövid áttekintést nyújtunk.

A vizuális összefoglaló a 6.10. ábrán található.

6.3.1. Analízis

Az analízis *előfeldolgozás*t hajt végre a bemeneti forráskódon. Ellenőrzi, hogy lexikálisan, szintaktikusan, illetve szemantikusan helyes-e a kódunk. Ha ez nincs így, a megfelelő helyen hibát dob.

Lexikális elemzés

- *Feladat*: A forrásszöveg elemi egységekre, ún. **token**ekre bontása. Idegen szóval ez a **tokenizáció**.
- *Bemenet*: karaktersorozat
- *Kimenet*: tokenek sorozata + lexikális hibák
- *Eszközök*: reguláris kifejezések, véges determinisztikus automaták

```
x = x + 1;
```

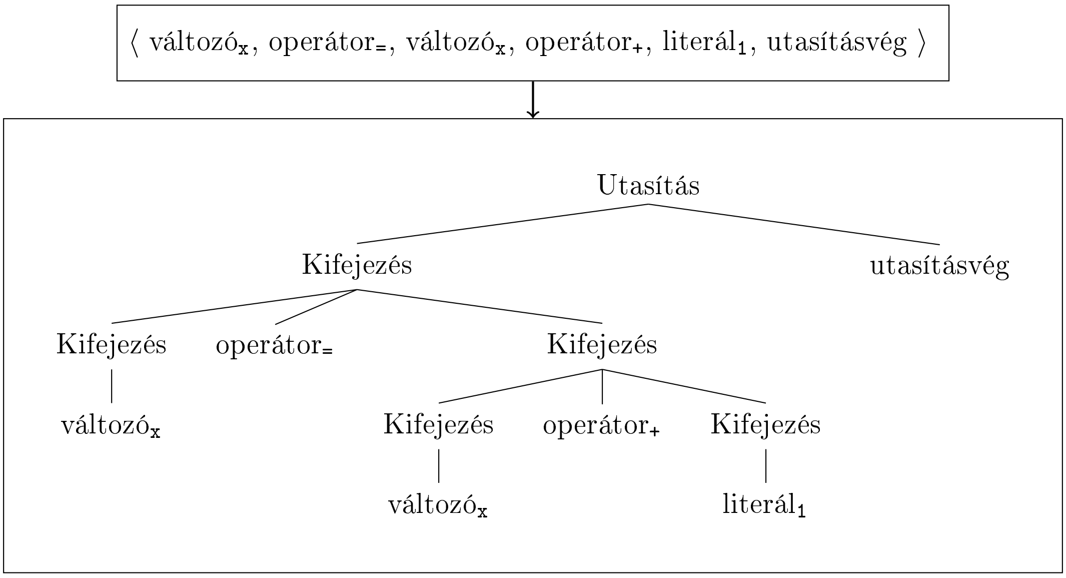
$$\downarrow$$

$$\langle\ \text{változó}_{\mathtt{x}},\ \text{operátor}_{=},\ \text{változó}_{\mathtt{x}},\ \text{operátor}_{+},\ \text{literál}_{\mathtt{1}},\ \text{utasításvég}\ \rangle$$

6.6. ábra. Helyes lexikális elemzés eredménye

Szintaktikus elemzés

- *Feladat*: A forrásszöveg szerkezetének felderítése, formai ellenőrzése.
- *Bemenet*: tokenek sorozata
- *Kimenet*: szintaxisfa + szintaktikus hibák
- *Eszközök*: környezetfüggetlen nyelvtanok, veremautomaták



6.7. ábra. Helyes szintaktikus elemzés eredménye

Az alábbi környezetfüggetlen nyelv határozza meg a szintaxist. Ezen nyelvnek a terminális szimbólumai a tokenek (lexikális elemek).

<Utasítás> ::= <Kifejezés> utasításvég

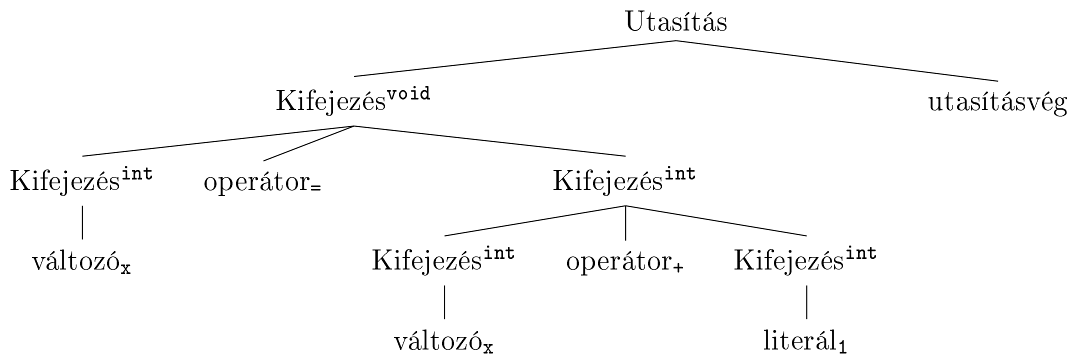
<Kifejezés> ::= változó | literál | <Kifejezés> operátor <Kifejezés>

Szemantikus elemzés

- *Feladat*: A statikus szemantika (pl. változók deklaráltsága, típushelyesség stb.) ellenőrzése
- *Bemenet*: szintaxisfa
- *Kimenet*: **szintaxisfa attribútumokkal**, **szimbólumtábla** + szemantikus hibák
- *Eszközök*: **attribútumnyelvtanok**

Név	Típus
`x`	`int`

6.8. ábra. Szimbólumtáblázat. Általában több információt is tartalmaz.



6.9. ábra. Szintaxisfa attribútumokkal

6.3.2. Szintézis

Kódgenerálás

- *Feladat*: Alacsonyabb szintű belső reprezentációkra, végül **tárgykód**dá alakítja a programot
- *Bemenet*: szintaxisfa attribútumokkal, szimbólumtábla
- *Kimenet (az utolsó menetben)*: **tárgykód**
- *Eszközök*: **kódgenerálási sémák**

Közvetlenül gépi kódot csak nagyon indokolt esetben érdemes generálni. Helyette Assembly kód (pl. valamely platform Assembly nyelve vagy LLVM) generálható, amit assemblerekkel fordítunk tovább.

Megemlíthetjük az ún. **transzláció**t is. Ez magas szintű nyelvek közti fordítást jelent. Ez lehet végcél (pl. projektek portolása esetén egyik nyelvről a másikra), ugyanakkor elterjedt nyelvekre való fordítás esetén használhatjuk azok fordítóit a gépi kód / bájtkód előállításához.

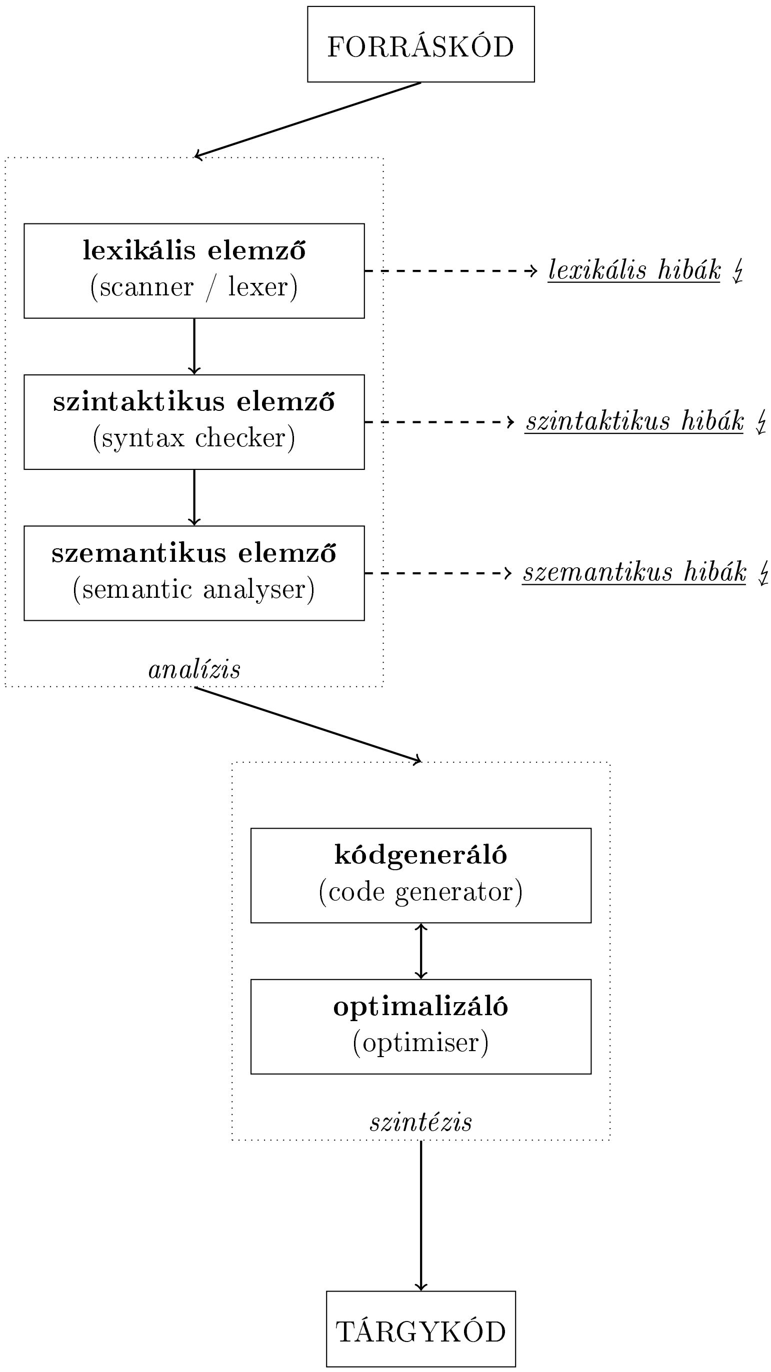
Optimalizáció

- *Feladat*: Kód átalakítása hatékonyságnövelés céljából (pl. sebességnövelés, memóriaigény csökkentés)
- *Bemenet*: belső reprezentáció / tárgykód
- *Kimenet (az utolsó menetben)*: belső reprezentáció / tárgykód
- *Eszközök*: **Statikus elemzés**, **transzformációs keretrendszerek**

Egyes compilerek több lépésben is optimalizálhatják a kódot.

Ahogy megtárgyaltuk, a szintézis fázisa úgy kezdődik, hogy rendelkezésünkre áll a szintaxisfa. Ezen ún. **magas szintű optimalizáció**t hajtanak végre, így kapunk egy optimalizált szintaxisfát[1]. Ez alapján megtörténik a kódgenerálás, létrejön az Assembly kód. Végül ezt az Assembly kódot optimalizáljuk (**alacsony szintű optimalizálás**).

[1] El tudjuk képzelni, hogy milyen matematikai vonatkozásai lehetnek ennek: egy fagráfot kevesebb úttal vagy csúccsal „írjunk fel” úgy, hogy az ezen gráf által felírt „program” ekvivalens maradjon az eredetivel. (A megfogalmazás természetesen matematikailag pontatlan, csupán a szemléltetés céljából raktam ide.)



6.10. ábra. A fordítóprogramok logikai felépítése

6.4. Szerkesztés és végrehajtás

Általában amikor programot írunk, modularizálva írjuk meg azt, azaz több, kisebb részekre bontjuk fel – legtöbbször **könyvtárak**, **csomagok** formájában. Ezen összetevők gyakran hivatkoznak egymásra, emiatt elengedhetetlen, hogy el is érjék egymást. Ezt oldja meg a(z) **(össze)szerkesztés** vagy **linkelés**.

A mai rendszereken kétféle stratégia létezik a könyvtárak összeszerkesztéséhez.

1. <u>Statikus szerkesztés</u>

   Nagy vonalakban azt jelenti, hogy mindazon **könyvtárakat, csomagokat**, melyeket felhasználunk a programunkban, **„beleégetjük" a gépi kódba**. Tipikusan ez történik, amikor C-ben include-oljuk az `stdio.h` könyvtárat. Hiába csak a `printf` függvényt használjuk fel, minden más is bekerül a binárisba.

   Ez előnyös lehet, mivel csökkenti a külső függőségeket (akár használhatjuk a programunkat olyan rendszeren, amin nincs telepítve a `glibc`). Hátránya, hogy jelentősen megnövelheti a futtatható fájl méretét.

   A statikus könyvtárak tipikus kiterjesztései: `.a`, `.lib`.

2. <u>Dinamikus szerkesztés</u>

   Futási időben éri el a hivatkozott függvényeket, osztályokat, stb. Előnye, hogy kisebb lesz a futtatandó fájl mérete. Hátránya pedig, hogy meg kell győződnünk futtatás előtt, hogy telepítve vannak-e a szükséges **függőségek**.

   A dinamikus könyvtárak tipikus kiterjesztései: `.so` (*shared object*), `.dll` (*dynamically linked library*).

   Ha visszaemlékszünk az *Objektumelvű programozás* c. tárgyból tanultakra, a gyakorlatokon használtuk a `TextFileReader.dll` könyvtárat, ami (a mostani tudásunkkal összevetve) egy dinamikusan linkelt könyvtár.

A programunk futtatása, végrehajtása esetén a **teljes futtatható állományt betöltjük a fájlrendszerből**. Ha dinamikus könyvtárakat is használunk, ezek is betöltésre kerülnek.

7. fejezet

Lexikális elemzés

7.1. A tokenizáció

Adott az alábbi karakterlánc:

`x = (x + 2) * 3;`

A feladat, hogy hogyan állapíthatjuk meg a benne lévő tokeneket?

Számunkra ránézésre nyilvánvaló, hogy a helyes tokenizáció a következő:

$$\langle\ \texttt{x},\ \texttt{=},\ \texttt{(},\ \texttt{x},\ \texttt{+},\ \texttt{2},\ \texttt{)},\ \texttt{*},\ \texttt{3},\ \texttt{;}\ \rangle.$$

Ezt kell valahogy a „számítógép nyelvén" kifejezni. Megállapítunk bizonyos tulajdonságokat, melyekkel kizárásos alapon kiválaszthatjuk a tokeneket.

- **Aminek a belső szerkezete fontos, nem lehet token!**
  Például az értékadásnak van bal és jobb oldala, mindkettőnek megvannak a rá vonatkozó szabályai.

  $$\langle\ \texttt{x},\ \texttt{=},\ \texttt{(x + 2) * 3},\ \texttt{;}\ \rangle\ \lightning$$

  Mivel az értékadás önmaga is egy utasítás, amire szintén vonatkoznak szabályok, emiatt az alábbi tokenizáció sem helyes.

  $$\langle\ \texttt{x = (x + 2) * 3},\ \texttt{;}\ \rangle\ \lightning$$

- **Aminek a formája nem írható le reguláris kifejezéssel, nem lehet token!**
  Tipikus példája ennek a helyes zárójelezések nyelve, ami környezetfüggetlen grammatikával írható le.

  $$\langle\ \texttt{x},\ \texttt{=},\ \texttt{(x + 2)},\ \texttt{*},\ \texttt{3},\ \texttt{;}\ \rangle\ \lightning$$

Következő probléma: a **fehérelválasztók** (*whitespaces*). A legtöbb programozási nyelvnél a szóközök, tabulátorok és újsorok **nem alkotnak tokeneket**, csak más tokenek elválasztására valók. A lexikális elemzőnek fel kell ismernie ezeket, de nem kell továbbítania a szintaktikus elemző felé.

Ezalól kivételt képeznek a **behúzásra** (vagy indentációra) **érzékeny nyelvek**, mint a Python vagy a Haskell. Az elemzőnek a **sorok behúzását számon kell tartania**. Növekvő behúzás jelenti a blokknyitó tokent (C-ben `{`), a csökkenő behúzás meg a blokkzáró tokent (C-ben `}`).

Érdekességként megemlítjük a *Whitespace* nyelvet, amiben kizárólag a fehérelválasztóknak van jelentése.

Ahogy korábban megállapítottuk, token csak az lehet, amit leírhatunk reguláris kifejezéssel. Bizonyos reguláris kifejezések elsőbbséget élveznek a többivel szemben – nevezetesen azok, melyekkel kulcsszavakat írunk le. Tehát a konkrétabbak előrébb, az általánosabbak hátrébb kerülnek a felsorolásban.

Reguláris kifejezés	**Példák**	**Token típus**
`while`	*while*	kulcsszó a While nyelvben
`[a-zA-Z][a-zA-Z0-9_]*`	*x*, *apple123*, *list_length*	azonosító
`[+-]?[0-9]+`	*0*, *123*, *-2*, *+100*	egész számliterál
`[ \t\n]+`	(fehérelválasztók nemüres sorozata)	–
`"//".*`	*// Ez egy megjegyzés*	–

7.1. ábra. Definíció reguláris kifejezéssekkel

7.2. A lexikális elemzés elvei

- **Leghosszabb illeszkedés elve**
  A leghosszabban illeszkedő karaktersorozatból képzünk tokent.

  Pl. `w|hile`, `wh|ile`, ..., `whil|e`$\rightarrow$ Hiába helyes azonosító szimbólum a `w`, `wh`, ..., `whil`, mégis folytatni kell a keresést.

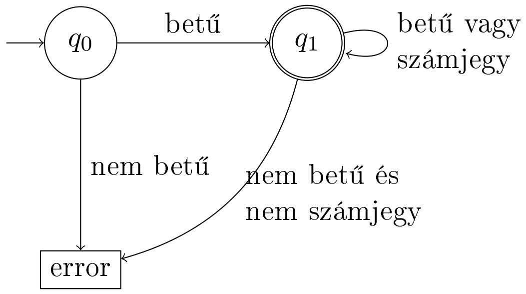
- **Prioritás elve**
  Ha a leghosszabban illeszkedő karaktersorozat több reguláris kifejezésre is illeszkedhet, a sorrendben korábban álló „nyer”.

  Pl. `while|` $\rightarrow$ Lehet kulcsszó is, lehet azonosító is. Mivel kulcsszóként korábban definiáltuk, így ez élvez elsőbbséget.

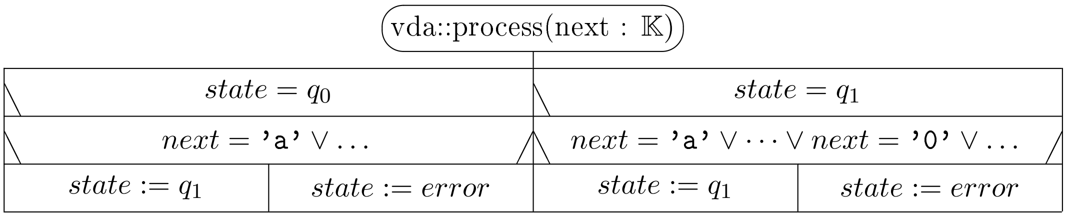
7.3. Implementációja

A reguláris kifejezések átalakíthatók **véges determinisztikus automatá**vá.

`[a-z][a-z0-9]*`



A VDA implementációja történhet **elágazásokkal**, amelynek a struktogramja itt látható (a $\mathbb{K}$ jelöli a `char` adattípust).



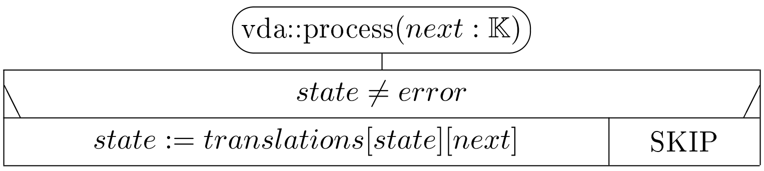

```
void vda::process(char next)
{
    if (state == q0) {
        if (next == 'a' || ...) {
            state = q1;
        } else {
            state = error;
        }
    } else if (state == q1) {
        if (next == 'a' || ... || next == '0' || ...) {
            state = q1;
        } else {
            state = error;
        }
    }
}
```

VDA implementációja elágazásokkal

Megoldható ugyanakkor **táblázattal** is.

	q_0	q_1
a	q_1	q_1
⋮	⋮	
0	error	q_1
⋮	⋮	
other	error	error

7.2. ábra. A VDA táblázata




```
void vda::process(char next)
{
    if (state != error) {
        state = transitions[state][next];
    }
}
```

VDA implementációja táblázattal

7.4. Tokenhez csatolt információk

A felismert tokenekhez a lexikális elemző kiegészítő információkat csatol. Ezeket nevezzük **kitüntetett szintetizált attribútumok**nak. A jelentősségük a szemantikus elemzésnél fog megjelenni.

- **Minden tokenhez**: a token pozícióját (első karakter sor- és oszlop-, utolsó karakter sor- és oszlopszáma)
- **Azonosítókhoz**: az azonosító szövegét (ez szükséges a szemantikus elemzéshez)
- **Literálokhoz**: a literál értékét (kódgeneráláshoz, kódoptimalizációhoz szükséges)

7.5. Lexikális hibák

Lexikális hiba esetén hibajelzést ad a fordító, és *folytatja az elemzést*. A leggyakrabban előforduló hibák:

- Illegális karakter: A nyelv ábécéjébe nem tartozó karakter az inputszövegben.
  Az addig felépített token kiadja, ha volt illeszkedés. Az illegális karaktert követő karakterrel folytatódik az elemzés.
- Lezáratlan sztring
  A sor végén derül ki; az őt követő sorban folytatódik az elemzés.
- Lezáratlan többsoros megjegyzés
  A fájl végén derül ki; nincs további elemzés.

8. fejezet

Szintaktikus elemzés

8.1. Grammatikai előfeltételek

A lexikális elemzés kinyerte a tokenek sorozatát a forrásfájlból. Ebben a lépésben az a feladatunk, hogy ezen tokenekből a „nyelvtani hierarchiát”, a **szintaxisfát** állítsuk fel. Ehhez szükségünk vannak a **környezetfüggetlen nyelvtanok**ra, valamint az ezek elfogadására szolgáló **veremautomaták**ra.

Szintkaktikus elemzőt manapság nagyon egyszerűen hozhatunk létre különböző generátorok segítségével. Ilyen például a Bison, amit a gyakorlaton is használunk. Ennek a forrásfájljában (pl. `while.y`) megadjuk a lehetséges tokeneket és definiáljuk a szabályainkat.

Ahhoz, hogy elemezhető nyelvet tudjunk készíteni, a nyelvtanunknak szüksége van arra, hogy bizonyos előfeltételeket teljesítsen.

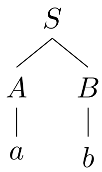
1. Redukáltság: Nincsenek „felesleges” nemterminálisok.
   Mindegyik nemterminálishoz adható olyan levezetés, amiben szerepel, és nem üres terminális sorozatot vezetünk le belőle.

2. Ciklusmentesség: Nincs $A \longrightarrow {}^{+}A$ levezetés.
   Ciklusos nyelvtan olyan, aminek az egyik bal oldalának levezetéséből visszajuthatunk önmagába. Példa ciklusos (tehát nem jó) nyelvtanra:

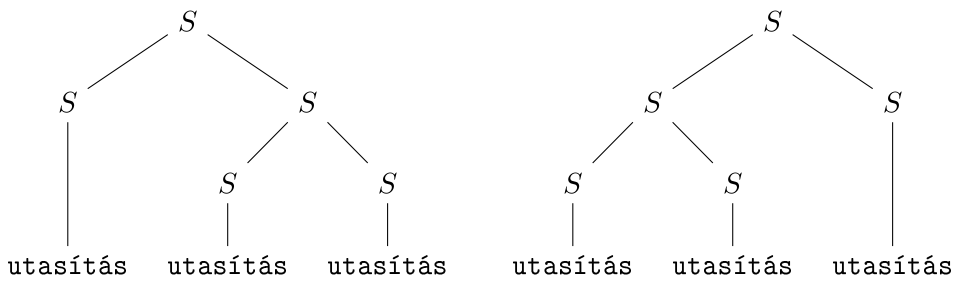
$$\begin{aligned} S &\longrightarrow A \\ A &\longrightarrow a \mid B \\ B &\longrightarrow A. \end{aligned}$$

3. Egyértelműség: Minden szóhoz **pontosan egy szintaxisfa** tartozik.
   - Több levezetés tartozhat egy szóhoz, de a szintaxisfáik legyenek identikusak!

$$\begin{aligned} S \Longrightarrow AB \Longrightarrow aB \Longrightarrow ab \\ S \Longrightarrow AB \Longrightarrow Ab \Longrightarrow ab \end{aligned}$$

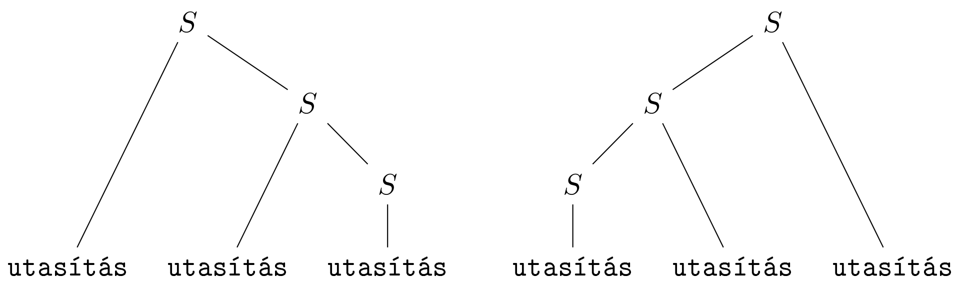


- Példa nem egyértelmű nyelvtanra: $S \longrightarrow$ `utasítás` $\mid SS$.



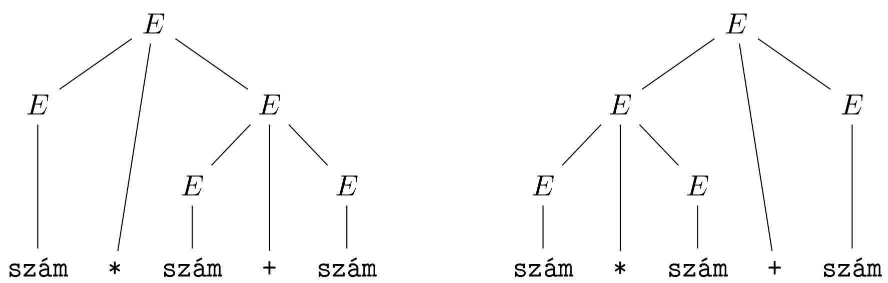
  Ez a nemegyértelműség feloldható a nyelvtan átalakításával:

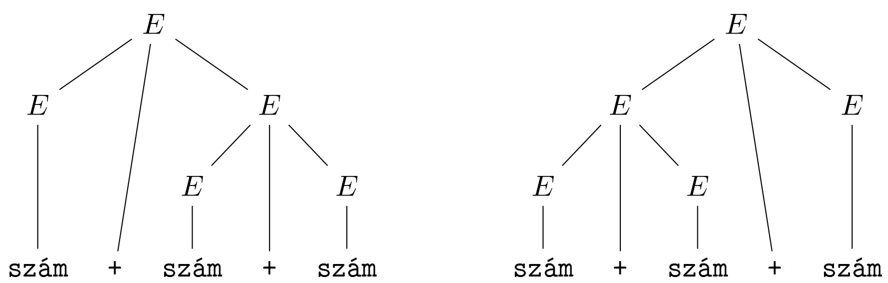
  $$S \longrightarrow \texttt{utasítás}\ S \mid \texttt{utasítás} \quad \text{vagy} \quad S \longrightarrow S\ \texttt{utasítás} \mid \texttt{utasítás}.$$



- A nem-egyértelműség feloldható, ha megadjuk az operátorok precedenciáját és asszociativitását. Az alábbi nyelvtan nem egyértelmű:

  $$E \longrightarrow \texttt{szám} \mid E\ \texttt{+}\ E \mid E\ \texttt{*}\ E.$$





  Átalakítva:

  – A `*` magasabb precedenciájú, mint a `+`.

  – Mindkét operátor balasszociatív.

  $$E \longrightarrow F \mid E\ \texttt{+}\ F$$
  $$F \longrightarrow \texttt{szám} \mid F\ \texttt{*}\ \texttt{szám}.$$

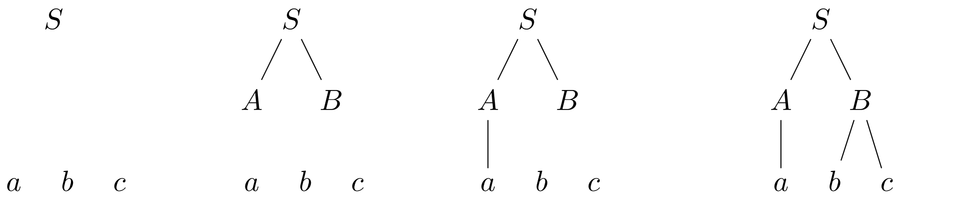
8.2. Felülről lefele elemzés

A **felülről lefele elemzés** az egyik lehetséges stratégiája a szintaktikus elemzésnek. A **startszimbólumból indulva a terminálisok felé** építjük a szintaxisfát. A **bemenet feldolgozása balról jobbra** történik, így ezáltal **legbaloldalibb levezetés**t állít elő – ami azt jelenti, hogy több terminális esetén a legbaloldalibbat helyettesíti.

Szemléltessük az alábbi nyelvtanon:

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow AB \\
A &\longrightarrow a \\
B &\longrightarrow bc.
\end{aligned}
$$

Legyen a bemeneti szövegünk: abc. A szó szintaxisfáját így kapjuk meg:



S $\qquad$ $S \Rightarrow AB$ $\qquad$ $S \Rightarrow AB \Rightarrow aB$ $\qquad$ $S \Rightarrow AB \Rightarrow aB \Rightarrow abc$

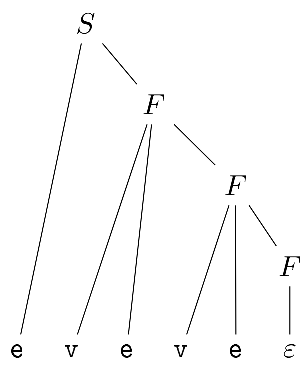
8.1. ábra. Felülről lefele elemzés lépései

Felmerül a kérdés: **mi alapján választjuk ki a használandó szabályt?** A probléma egyszerűen feloldható előreolvasással. Vegyük a következő példát!

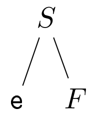
Legyen a nyelvtanunk, ami vesszővel (`v`) elválasztott elemek (`e`) listáját írja le. Megengedjük az üres listát is (ε).

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow \varepsilon \mid \mathtt{e}F \\
F &\longrightarrow \varepsilon \mid \mathtt{ve}F
\end{aligned}
$$

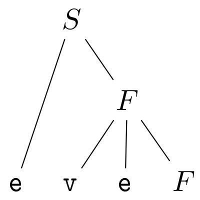
A példaszövegünk legyen „`apple, banana, pear`”. A lexikális elemzővel megkapjuk a tokenek sorozatát, ami „`eveve`”. Megelőlegezzük, hogy a szintaxisfának így kell kinéznie.



Szemléltessük a szintaktikus elemzést! Egyelőre nem olvastunk egy karaktert sem, emellett a szintaxisfánk is kizárólag az S startszimbólumból áll. Beolvasunk egyet, a szövegünk `e` lesz. Megnézzük, hogy erre melyik szabály passzol. Mivel az $S \longrightarrow \mathtt{e}F$ jobb oldala ugyanezzel a karakterrel kezdődik, így ezt választjuk. Így a fánk már 3 csúcsból áll.



Folytatjuk az elemzést, előreolvasunk ismét egy karaktert. A szövegünk állapota `ev`, hisz `v`-t olvastunk be. Ezt kihasználva kiválasztjuk az $F \longrightarrow \mathtt{ve}F$ szabályt. A szintaxisfánk állapota:



Ezt az eljárást addig folytatjuk, ameddig fel nem dolgoztuk a teljes szöveget. Ha nem marad már beolvasandó karakter, akkor az ε-t kapjuk, ami biztosítja, hogy befejezhessük az elemzést. Ha felidézzük a végleges fát, a legvégén láthattunk egy elsőre feleslegesnek tűnő üres szót. Valójában pont emiatt került a végére.

Következő kérdés: **hány tokent kell előreolvasnunk?** Szerencsére, ezt is megválaszolhatjuk, ugyanis ez a nyelvtan tulajdonságaitól függ. Az előző nyelvtan esetében elegendő volt 1-et előre olvasnunk, míg más nyelvtanok esetében más lehet ez a konstans.

Ennek jellemzéséhez bevezetjük az $\boxed{LL(k)\text{ nyelvtan}}$ fogalmát.

> **8.2.1. definíció ($LL(k)$ nyelvtan).** *Egy környezetfüggetlen nyelvtan $LL(k)$ tulajdonságú valamely $k \in \mathbb{N}^+$ számra, ha felülről lefelé elemzés esetén a legbaloldalibb feldolgozatlan nemterminálishoz egyértelműen meghatározható a rá alkalmazandó nyelvtani szabály legfeljebb k token előreolvasásával.*

Az elnevezés a „***l**eft to right using **l**eftmost derivation*” elnevezés angol rövidítéséből származik. A legutóbbi példánk $LL(1)$ tulajdonságú.

Megjegyzések.

- Azt mondtuk, hogy a megfelelő szabály kiválasztása előreolvasással oldható meg. Ez azt feltételezi, hogy nulla karaktert nem olvashatunk előre, ezért $k \in \mathbb{N}^+$.
- Nem minden nyelvtanhoz adható meg ilyen konstans. A következő tétel ezt mondja ki (nem bizonyítjuk).

> **8.2.1. tétel.** *Van olyan nyelvtan, ami semmilyen $k \in \mathbb{N}^+$-re sem $LL(k)$.*

Például az alábbi nyelvtanhoz nem létezik megfelelő $k \in \mathbb{N}^+$ szám.

$$S \longrightarrow A|B$$
$$A \longrightarrow \mathtt{a}|\mathtt{a}A$$
$$B \longrightarrow \mathtt{ab}|\mathtt{a}B\mathtt{b}$$

A tanulmányaink során az $LL(1)$ nyelvtanokkal foglalkozunk részletesebben. Ennek egy implementációja az ún. **rekurzív leszállás**.

A rekurzív leszállást azért kedveljük, mivel rendkívül kényelmessé teszi az elemző lekódolását. Gyakorlatilag arra van szükségünk, hogy a **nyelvtani szabályokat** közvetlenül **átírjuk függvényekké** egy tetszőleges programozási nyelvben.

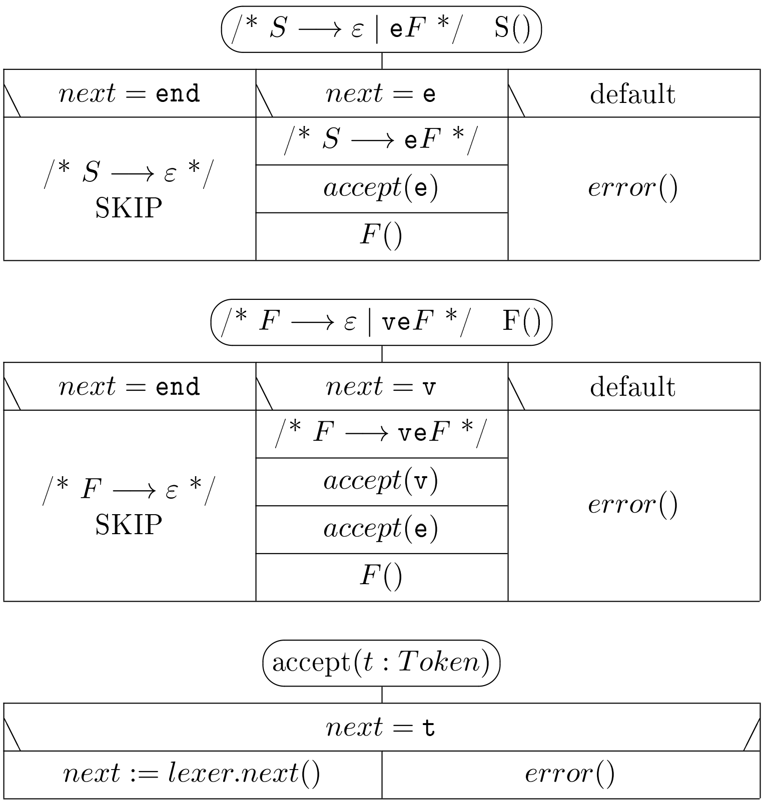
1. **Mindegyik nemterminálishoz írunk egy-egy függvényt**.
   A példák a korábban definiált „listás nyelv" nemterminálisait illusztrálják.

2. **Minden szabályalternatívát egy-egy elágazás ágaként fejezünk ki**.
   Például a $S \longrightarrow \varepsilon \mid \mathtt{e}F$ szabály két ágból fog állni; egy az üres szó esetéért felel, a másik meg a lista fejeleméért.
   Gondoskodnunk kell a hibakezelésről is, emiatt egy további ágat fentartunk erre a célra. Így végső soron egy 3-ágú elágazásunk lesz.

3. **Az ágak belsejében a szabály jobboldalának minden szimbólumához egy-egy utasítást rendelünk**.
   A terminálisokhoz egy-egy $accept()$ függvényhívás fog tartozni, míg a nemterminálisokhoz a hozzájuk tartozó eljárás kerül meghívásra(az S-hez az $S()$, az F-hez az $F()$).

4. Az $accept()$ eljárás feladatai:

   - Ha az elvárt token következik, akkor új tokent kér a lexikális elemzőtől.
   - Egyébként hibát jelez.



8.2. ábra. A példanyelvtan elemzőjének függvényeinek struktogramjai

Megjegyzések.

- Ha a nyelvtan rekurzív, akkor rekurzív vagy kölcsönösen rekurzív függvényeket kapunk, innen a módszer neve.
- Valójában ez az elemző is veremautomata: a függvényhívásokat kezelő futási idejű verem az automata verme.
- A levezetés legbaloldalibb redukálható nemterminálisát **nyél**nek is nevezik.

Az egyes függvények felépítését elég alaposan körül tudjuk írni. Azonban felmerülhet a kérdés, hogy az **elágazások feltételeit miképpen tudjuk meghatározni**? A válasz a $FIRST$ halmaz és $FOLLOW$ halmaz fogalmában rejlik, amiket be is vezetünk.

8.2.2. definíció ($FIRST_1$ halmaz). *Adott nyelvtan esetén egy α szimbólumsorozatra a $FIRST_1(\alpha)$ halmaz azokat a* ***terminálisokat*** *tartalmazza, amelyek az α-ból levezethető szimbólumsorozatok elején állnak.*
Ha α-ból levezethető az üres szó (ε), akkor ε is eleme a halmaznak.

A $FIRST$ halmaz általánosan n hosszú eredménysorozatokra is definiálható: $FIRST_n(\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
FIRST_1(\varepsilon) &= \{\varepsilon\} && \underline{\varepsilon} \\
FIRST_1(\mathtt{e}F) &= \{\mathtt{e}\} && \underline{\mathtt{e}}F \\
FIRST_1(\mathtt{ve}F) &= \{\mathtt{v}\} && \underline{\mathtt{v}}\mathtt{e}F \\
FIRST_1(F) &= \{\varepsilon, \mathtt{v}\} && \underline{\varepsilon} \text{ és } \underline{\mathtt{v}}\mathtt{e}F
\end{aligned}
$$

8.2.3. definíció ($FOLLOW_1$ halmaz). *Adott nyelvtan esetén egy α szimbólumsorozatra a $FOLLOW_1(\alpha)$ halmaz azokat a* ***terminálisokat*** *tartalmazza, amelyek az α után állhatnak a kezdőszimbólumból induló levezetésekben.*
Ha α után nem áll semmi, akkor $\#$ (szöveg vége jel) eleme a halmaznak.

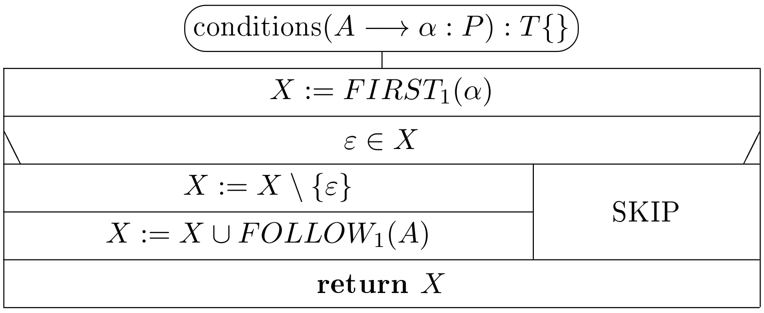
A $FOLLOW$ halmaz általánosan n hosszú eredménysorozatokra is definiálható: $FOLLOW_n(\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
FOLLOW_1(S) &= \{\#\} && S\_ \\
FOLLOW_1(F) &= \{\#\} && S \Rightarrow \mathtt{e}F\_ \Rightarrow \mathtt{ve}F\_ \Rightarrow \dots \\
FOLLOW_1(\mathtt{e}) &= \{\#, \mathtt{v}\} && S \Rightarrow \mathtt{e}F \Rightarrow \mathtt{e}\_ \quad \text{és} \quad S \Rightarrow \mathtt{e}F \Rightarrow \mathtt{e}\underline{\mathtt{v}}\mathtt{e}F
\end{aligned}
$$

Az elágazások feltételeinek meghatározását a következőképp tehetjük meg.

- Az $A \longrightarrow \alpha$ szabályhoz meghatározzuk a $FIRST_1(\alpha)$ halmazt.
- Ha ebben van ε, akkor kivesszük ε-t és helyette hozzávesszük a halmazhoz $FOLLOW_1(A)$ elemeit.
- Az így kapott halmaz elemeiből (pl. x_1, x_2, ..., x_n) képezzük az elágazás feltételét:

$$next = x_1 \vee next = x_2 \vee \cdots \vee next = x_n.$$



8.3. ábra. Az elágazás feltételének meghatározásának algoritmusa

Ellenőrizhető a struktogram segítségével, hogy valóban ezen eredmények jönnek ki.

$$\begin{aligned}
conditions(S \longrightarrow \varepsilon) &= \{\#\} \\
conditions(S \longrightarrow \mathtt{e}F) &= \{\mathtt{e}\} \\
conditions(F \longrightarrow \varepsilon) &= \{\#\} \\
conditions(F \longrightarrow \mathtt{ve}F) &= \{\mathtt{v}\}
\end{aligned}$$

8.2.2. tétel ($LL(1)$ tulajdonság ellenőrzése). *Egy környezetfüggetlen nyelvtan pontosan akkor $LL(1)$ tulajdonságú, ha bármely két $A \longrightarrow \alpha$, $A \longrightarrow \beta$ (a két A megegyezik!) szabályokhoz a fenti módon meghatározott halmazok diszjunktak.*

- Példa $LL(1)$ tulajdonságú nyelvtan.

$$\begin{aligned}
conditions(S \longrightarrow \varepsilon) &= \{\#\} \\
conditions(S \longrightarrow \mathtt{e}F) &= \{\mathtt{e}\} \\
\{\#\} \cup \{\mathtt{e}\} &= \emptyset \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
conditions(F \longrightarrow \varepsilon) &= \{\#\} \\
conditions(F \longrightarrow \mathtt{ve}F) &= \{\mathtt{v}\} \\
\{\#\} \cup \{\mathtt{v}\} &= \emptyset \quad \checkmark
\end{aligned}$$

- Példa nem $LL(1)$ tulajdonságú nyelvtanra.

$$\begin{aligned}
conditions(S \longrightarrow \varepsilon) &= \{\#\} \\
conditions(S \longrightarrow N) &= \{\mathtt{e}\} \\
\{\#\} \cup \{\varepsilon\} &= \emptyset \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
conditions(N \longrightarrow \mathtt{e}) &= \{\mathtt{e}\} \\
conditions(N \longrightarrow N\mathtt{ve}) &= \{\mathtt{e}\} \\
\{\mathtt{e}\} \cup \{\mathtt{e}\} &\neq \emptyset \quad \lightning
\end{aligned}$$

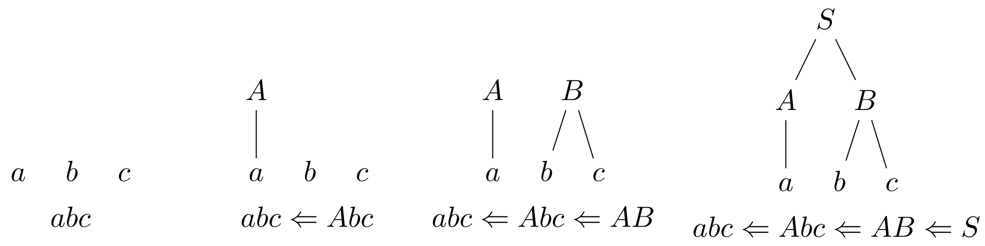
8.3. Alulról felfele elemzés

Az **alulról felfele elemzés** a másik lehetséges stratégiája a szintaktikus elemzésnek. A **terminálisokból a startszimbólum felé** építjük a szintaxisfát. A **bemenet feldolgozása** továbbra is **balról jobbra** történik, azonban az elemzés a **legjobboldalibb levezetés inverzé**t állítja elő – a legjobboldalibb levezetés azt jelenti, hogy több terminális esetén a legjobboldalibbat helyettesíti.

Szemléltessük az korábbi nyelvtanon:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \\ A &\longrightarrow a \\ B &\longrightarrow bc. \end{aligned}$$

Legyen a bemeneti szövegünk továbbra is: *abc*. A szó szintaxisfáját így kapjuk meg:



8.4. ábra. Alulról felfele elemzés lépései

Az alulról felfele elemzők egyik gyakori változatával, az ún. LR elemzőkkel fogunk megismerkedni. A pontos definícióját a későbbiekben kimondjuk.

Hasonlóan az LL-hez, az LR-elemzés is **verem alapú**, ám a verem nem futás idejű – tehát a kódban valóban példányosítanunk kell egyet. **Ebben gyűjtjük a szimbólumokat** (terminálisokat és nemterminálisokat egyaránt) egészen addig, amíg a megfelelő szabály-jobboldal megjelenik benne.

Tartozik hozzá **két művelet**.

1. Léptetés (*shift* vagy *push*): A következő token elhelyezése a verem tetején.
2. Redukció (*reduce* vagy *pop*): A szabályjobboldal helyettesítése szabálybaloldallal a veremben, közben a szintaxisfa bővítése.

Szemléltessük a műveleteket a következő *balrekurzív* nyelvtanon (ami szintén a vesszővel elválasztott listák nyelét fejezi ki):

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \varepsilon \mid N \\ N &\longrightarrow \texttt{e} \mid N\texttt{ve} \end{aligned}$$

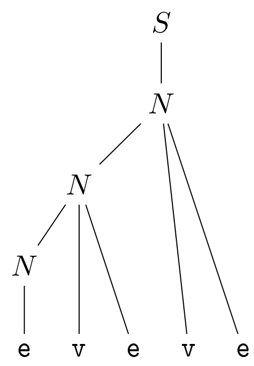
A példaszavunk továbbra is legyen az „`eveve`”.

Kezdetben a vermünk üres, így előreolvasunk egy karaktert. Betesszük a verembe (`e`) – azaz léptetünk. Ekkor megjelent egy szabályjobboldal ($N \longrightarrow \texttt{e}$), amit kicserélhetünk a bal oldalával (N).

$$\# \xRightarrow{shift} \texttt{e} \xRightarrow{reduce} N.$$

Folytatjuk a léptetést. A verem állapota így N`v` lesz. Nincs ilyen alakú szabályjobboldal, így újból léptetünk. A veremben N`ve` lesz. Ez már helyettesíthető szabálybaloldalra ($N \longrightarrow N\texttt{ve}$), így redukálunk (verem: N). Kettőt léptetünk (verem: N`v`, N`ve`), majd redukálunk (verem: N). Mivel elfogytak a beolvasandó karaktereink, így tovább redukálhatjuk a verem tartalmát. Az elemzés akkor sikeres, ha csupán az S marad benne a legvégén.

$$\# \xRightarrow{shift} \texttt{e} \xRightarrow{red.} N \xRightarrow{shift} N\texttt{v} \xRightarrow{shift} N\texttt{ve} \xRightarrow{red.} N \xRightarrow{shift} N\texttt{v} \xRightarrow{shift} N\texttt{ve} \xRightarrow{red.} N \xRightarrow{red.} S.$$



8.5. ábra. Az LR elemzés által létrehozott szintaxisfa

Ha visszapillantunk a korábbi ábrára, ahol egy léptetés és redukció után az N szerepelt a veremben, észrevehetjük, hogy akár rögtön abban a lépésben is redukálhattuk volna S-re a tartalmát – ezzel kihagyva a szövegünk hátralévő 80%-át.

A korábbiakhoz hasonlóan, felmerülhet a kérdés: **hogyan döntjük el, hogy mikor melyik műveletet végezzük el**? Ennek az eldöntéséhez figyelembe kell vennünk a *következő valahány token*t (ami **előreolvasás**t jelent), valamint az **elemző állapotát** (ami a verembe bekerülő szimbólumoktól függően változik).

Ezzel el is érkeztünk ahhoz, hogy kimondjuk az $\boxed{LR(k) \text{ nyelvtan}}$ pontos definícióját.

8.3.1. definíció ($LR(k)$ nyelvtan). *Egy környezetfüggetlen nyelvtan $LR(k)$ tulajdonságú valamely $k \in \mathbb{N}$ számra, ha az elemzés pillanatnyi állapotából és legfeljebb k token előreolvasásával egyértelműen meghatározható, hogy léptetés vagy redukció következik, és redukció esetén az alkalmazandó nyelvtani szabály is kiderül.*

Az elnevezés a „***l**eft to right using **r**ightmost derivation*” elnevezés angol rövidítéséből származik.

Az $LR(1)$ elemzést fogjuk részletesen megvizsgálni – egyetlen szimbólum előreolvasása elegendő.

A korábbi megállapításaink alapján létre kell hoznunk egy **elemző táblázat**ot, ami meghatározza a lépéseket és az állapotátmeneteket. Mivel az LR elemzés verem alapú, így ez is egy **veremautomata** lesz. Négy **akció** szerepel egy ilyen táblázatban: *léptetés*, *redukció*, *elfogadás* és *hiba*.

	$\mathtt{e}$	$\mathtt{v}$	input vége	N
0	léptetés : 2	hiba	elfogadás	1
1	hiba	léptetés : 3	elfogadás	hiba
2	hiba	redukció : $N \longrightarrow \mathtt{e}$	redukció : $N \longrightarrow \mathtt{e}$	hiba
3	léptetés : 4	hiba	hiba	hiba
4	hiba	redukció : $N \longrightarrow N\mathtt{ve}$	redukció : $N \longrightarrow N\mathtt{ve}$	hiba

8.6. ábra. A nyelvtanunk $LR(1)$ elemző táblázata

Talán nem meglepő, a nyelvtannak ezen tulajdonságának ellenőrzésére is létezik tétel.

8.3.1. tétel ($LR(1)$ tulajdonság ellenőrzése). *Egy környezetfüggetlen nyelvtan pontosan akkor $LR(1)$ tulajdonságú, ha az elemző táblázatot kitöltő algoritmus konfliktusmentesen kitölti a táblázatot.*

Megjegyzés. A táblázat a nyelvtanból algoritmikusan létrehozható, de nem része a tananyagnak. Állítólag elég bonyolult.

9. fejezet

Szemantikus elemzés

A szintaktikus elemzés létrehozza a szintaxisfát. A szemantikus ellenőrzés azt állapítja meg róla, hogy „van-e értelme” annak, amit kifejez – mindezt fordítási időben.

Nyelvtől függően jelentősen eltérhetnek a specifikus feladatai, így csak általánosságokban fogunk róluk értekezni. A szemantikus elemzés két eszközt használ: ezek a **szimbólumtábla** és az **attribútumnyelvtan**.

9.1. Szimbólumtábla

A szimbólumtábla a deklarációkat tárolja. A fordítóban gyakran globális változó. Segítségével a szemantikus elemzés

- feldolgozza a deklarációkat,
- az azonosítószimbólumokat deklarációhoz köti,
- ellenőrzi a hatókörrel és láthatósággal kapcsolatos szabályokat.

A következő, **tipikus hibák**at képes kiszűrni:

- deklarálatlan változókat,
- újradeklarált változókat,
- változó hatókörön kívüli használatát,
- privát adattagok elérését (pontosabban azoknak a korlátozását),
- elfedésből adódó típushibákat.

Ahogy azt megtárgyaltuk, a lexikális elemző a forráskód karaktersorozatából tokenek sorozatát állítja elő.

$$\texttt{x = (x + 2) * 3;}$$
$$\downarrow$$
$$\langle\ \texttt{x, =, (, x, +, 2,), *, 3, ;}\ \rangle.$$

Arról is beszéltünk, hogy egyes tokenek rendelkezhetnek kiegészítő infromációkkal (az azonosító a szövegüket, a literálok az értéküket, stb.). Megelőlegezzük, hogy kitüntetett szintetizált attribútumoknak hívjuk őket.

type *Kind* **is** {function, parameter, local variable, stb.}

type *Type* **is** {int, int→void, stb.}

SymbolTable
+ *name* : $\mathbb{S}$
+ *kind* : *Kind*
+ *type* : *Type*
+ *declaration* : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ `/* (row, column) */`
+ *used_here* : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}\langle\rangle$ `/* list of coordinates */`
`/* additional fields may come here */`
+ SymbolTable(...)
`/* additional methods may come here */`

9.1. ábra. A szimbólumtábla egy lehetséges megvalósítása

Egy egyszerűbb nyelv esetében a szimbólumtáblát implementálhatjuk egy **hasító táblá**val. Ez olyan összetett típusú objektumokat tartalmaz, amelyek az adott deklarált „egységről" (legyen az változó, függvény, stb.) információkat tárolnak, mint például

- a nevét,
- fajtáját (függvény, függvényparaméter, lokális vagy globális változó, ciklus, elágazás, névtelen blokk, stb.),
- típusát (egész szám, int→void típusú függvény, stb.)
- a deklarációja helyét (a nevének első karaktere az eredeti szövegben melyik sor melyik oszlopában történik),
- mikor használtuk a program során.

Két művelettel is rendelkezik.

1. Beszúrás
   - deklaráció esetén
   - az új szimbólum és adatai bekerülnek a szimbólumtáblába
   - a beszúrás *mindig egy kereséssel kezdődik*, hogy kiderüljön az újradeklarálás
2. Keresés
   - szimbólum használatakor
   - a szimbólum *neve a kulcs* a kereséshez
   - a szimbólum használatát érdemes feljegyezni (pl. refaktoráláshoz)

```
void f(int p) {
    int x;
    cin >> x;
    cout << x+p+y;
}
```

Név	Fajta	Típus	Deklaráció	Használat
f	függvény	int→void	$(1, 6)$	$\langle\rangle$
p	paraméter	int	$(1, 12)$	$\langle(4, 13)\rangle$
x	lokális változó	int	$(2, 7)$	$\langle(3, 10), (4, 11)\rangle$

9.2. ábra. A kódrészlet és a hozzá tartozó szimbólumtábla

Megjegyzés. Ha a korábbi kódrészletben a függvény végére beillesztenénk a(z)

```
int x;
```

sort, akkor a változót nem tudná beszúrni a táblába, hiszen szerepel már egy ilyen nevű és típusú változó. Ilyenkor a compiler újradeklarálás hibájával fog visszajelezni.

Jobban járunk, ha hasító tábla helyett **verem adatszerkezet**et használunk a szimbólumtáblához. Ez sokkal jobb megoldás, ugyanis neki köszönhetően képesek vagyunk kezelni a **blokkszerkezetek**et, a változók **hatókör**ét, **láthatóság**át, valamint az **elfedés**t is!

A beszúrás lecserélődik egy klasszikus *push*() műveletre. Keresékor fentről lefelé keresünk a veremben, és az *első találat*nál megállunk.

Továbbá felveszünk egy ún. **blokk-index vektor**t, ami a nevével ellentétben szintén egy **verem**. Ennek az a feladata, hogy **amikor új blokk kezdődik, a blokk-index vektorban megjelöljük a szimbólumtábla-verem tetejét** – magyarán egy olyan pointert push-olunk bele, ami az adott „blokkelemre” mutat a szimbólumtáblában[1]. Függvényhívás esetén megfeleltethető a függvény aktivációs rekordjának. **Minden blokk megkezdésekor új mutató kerül a vektor tetejére**. A blokk végén eltávolítjuk a szimbólumokat a blokk-index vektor legfelső jelöléséig (néhány *pop*()). Végül a jelölést is eltávolítjuk a blokk-index vektorból.

```
int x = 1;
void f(int p) { // <- semantic analysis in progress
    cout << x;
    int x = 2;
    cout << x+p;
}
int p = x;
```

⋮	⋮	⋮	⋮
p	paraméter	int	$(2, 12)$
f	függvény	int→void	$(2, 6)$
x	globális változó	int	$(1, 5)$
Név	**Fajta**	**Típus**	**Deklaráció**

&(f)
Blokk-index vektor

9.3. ábra. Verem szerkezetű szimbólumtábla

Deklaráció feldolgozásakor ellenőrizni kell, hogy nem újradeklarált változóról van-e szó. Csak ez után szabad beszúrni a szimbólumot és adatait a táblázatba. A verem szerkezetű szimbólumtáblában **csak a blokk-index vektor legfelső bejegyzése által mutatott rekord fölött keresünk**, azaz az aktuális blokk szimbólumai között. Ha a blokk-index vektor üres, akkor az egész szimbólumtáblában keresünk. Ha nincs hiba, a szimbólum beszúrható a táblába.

9.2. Attribútumnyelvtan

A típusrendszerek a programhibák felderítésének legfontosabb eszközei. Ezek jelölik ki, milyen műveletek végezhetők az adatokkal. Vannak a jól ismert alaptípusaink (bool, int,

[1] A 9.3. ábrában a & jel jelöli az `f` nevű függvényhez tartozó szimbólumobjektum memóriacímét.

char, stb.), de a nyelv támogathat összetett típusokat is (tömb, rekord, mutató, referencia, osztály, interfész, unió, algebrai típusok, stb.). Ugyanakkor léteznek típus nélküli nyelvek is – ilyen a legtöbb Assembly nyelv.

Az **ellenőrzés két fázis**ban történik.

1. Statikus típusozás – fordítási időben
   - Futás közben már **csak az értékeket kell tárolni**, típusinformációt nem
   - Ha a program lefordul, típusokkal kapcsolatos hiba nem történhet futás közben: **biztonságosabb** megoldás
   - Ada, C++, Haskell, stb.
2. Dinamikus típusozás – futási időben
   - Futási időben az értéket mellett **típusokat is kell tárolni**
   - Az utasítások **végrehajtása előtt kell ellenőrizni** a típusokat
   - Futás közben derülnek ki a típushibák, cserébe **hajlékonyabbak** az ilyen nyelvek
   - Lisp, Erlang, stb.

A statikusan típusos nyelvek is használnak dinamikus technikákat: dinamikus kötés, Java `instanceof` operátora.

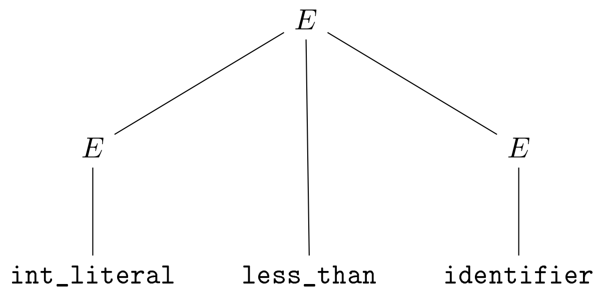
A típusokat is kétféleképpen adhatjuk meg.

1. Programozó adja meg → típusellenőrzés
   - A deklarációk típusozottak
   - A kifejezések egyszerű szabályok alapján típusozhatók
   - Egyszerűbb fordítóprogram, gyorsabb fordítás
2. Fordítóprogram találja ki → típuslevezetés, típuskikövetkeztetés
   - A deklarációkhoz (általában) nem kell típust megadni
   - A kifejezések típusát a fordítóprogram „találja ki" a műveletek alapján
   - Kényelmesebb a programozónak – azonban ajánlott típusozni a deklarációkat, hogy olvashatóbb legyen a kód

A **típuskonverzió** a kifejezés típusának megváltoztatását jelenti. Ez történhet automatikusan vagy explicit konverzióval is (C/C++-ban ez a kasztolás). A fordítóprogramnak ügyelnie kell az osztályhierarchiához kapcsolódó típuskonverziókra – azaz a *Liskov-féle helyettesítési elv*re. A típuskonverziókkal a kódgenerátornak is törődnie kell: adatkonverzióra is szükség lehet.

A szintaxist leíró nyelvtan szimbólumaihoz **attribútumok**at rendelünk, melyek a szemantikus elemzés vagy a kódgenerálás, kódoptimalizálás számára fontos, kiegészítő információk. Az ilyen nyelvtant nevezzük **attribútumnyelvtan**nak. A szabályokhoz **akciók**at (programkód részleteket) rendelünk. Ezek a meglévő attribútumértékekből újabb attribútumok értékeit számolják ki, valamint ellenőrzéseket végeznek, szemantikus hibákat jeleznek.

Legyen az elemzendő szövegünk a(z) `10 < x` az alábbi szintaxisfával
(a nyelvtan: $E \longrightarrow$ `int_literal` | `identifier` | E `less_than` E).



A következő attribútumokra lesz szükségünk.

- Az azonosítóknak a nevére, amit `identifier`.*name* formában érhetünk el (lásd a 9.1. ábrát). Ezek a **kitüntetett szintetizált attribútum**ok.
- A kifejezésekhez is hozzárendelünk (egész pontosan a *szabály bal oldalához*) egy *type* : *Type* attribútumot, amit $E.type$ formában érhetünk el. Az ilyen attribútumokat **szintetizált attribútum**oknak nevezzük. Az LR elemzőkhöz nagyon jól illeszkednek.

Az elemző **alulról felfele** haladva meghatározza először a literálok típusát. A felsőbb szintekhez érve a korábbiak alapján meghatározza az egész kifejezés típusát is az **akciók** segítségével.

$E \longrightarrow$ `int_literal`

$E.type :=$ int /* Akció, amely az egyetlen egészszám-literálból álló kifejezés típusát számolja ki. */

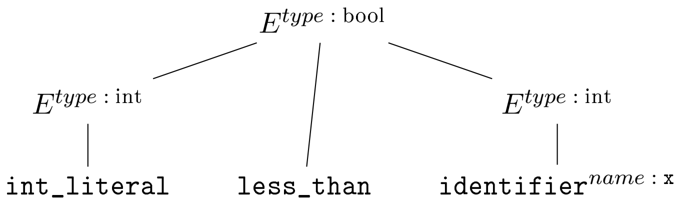
$E \longrightarrow$ `identifier`

/* Ellenőrzés: Deklarálva volt-e az azonosító? */	
`identifier`.*name* $\notin$ *symbol_table*	
error(...)	$E.type := symbol\_table.get\_type($`identifier`.*name*$)$ /* Azonosító kifejezés típusának beállítása */

$E_1 \longrightarrow E_2$ `less_than` E_3

/* Ellenőrzés: Megfelelő típusúak-e a „<” operátor paraméterei? */	
$E_2.type \neq \text{int} \vee E_3.type \neq \text{int}$	
error(...)	$E_1.type :=$ bool /* Az összes kifejezés típusának kiszámítása */

Az újonnan megállapított szintetikus attribútumok így bekerülnek a szintaxisfába.



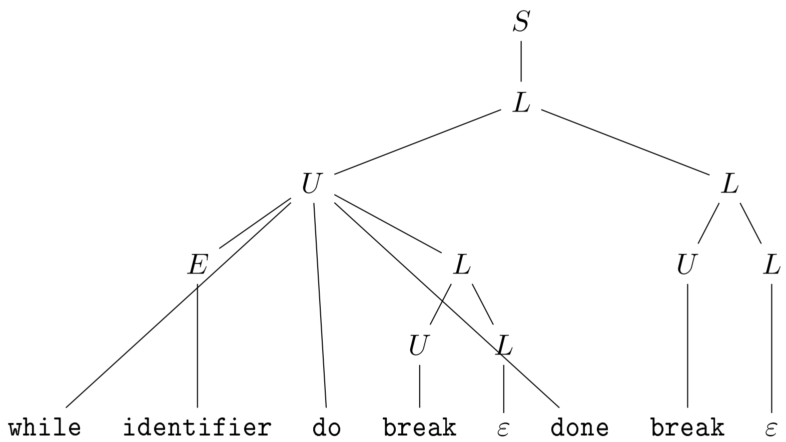
Vegyünk egy másik példát, amiben egy *újabb attribútumfajtá*ról lesz szó. A **ciklus** működését, valamint az abból való kiugrást (`break` utasítás) szemlélteti. Legyen a mondatunk

`while b do break done break`,

aminek a nyelvtana

$$
\begin{aligned}
&S \longrightarrow L\\
&L \longrightarrow \varepsilon \mid UL\\
&U \longrightarrow \texttt{break} \mid \texttt{while}\ E\ \texttt{do}\ L\ \texttt{done}\\
&E \longrightarrow \texttt{identifier}.
\end{aligned}
$$

A szintaxisfája nyilvánvalóan



Felvesszük a következő attribútumokat.

- Az L nemterminális szimbólumoknak (mint *loop*) egy $in\_loop : \mathbb{B}$ attribútumot.
- Az U szimbólumoknak (mint *utasításlista*) szintén egy $in\_loop : \mathbb{B}$ attribútumot.

Mindkettő esetben a *szabály jobb oldalán* állnak, amikor kiszámítjuk őket. Ugyanakkor fontos különbség, hogy **felülről lefelé** közvetít információt a szintaxisfában. Az ilyen attribútumokat **örökölt attribútum**oknak nevezzük, mivel a gyökerénél meghatározzuk ezt a tulajdonságot, ami az elemzés során „leszivárog” az alsóbb szintekre. Az egyes nyelvtani szabályainkhoz az alábbi **akció**kat rendeljük hozzá.

$S \longrightarrow L$

$L.in\_loop := false$
/* A legfelső szintű utasításlista nincs ciklus belsejében. */

$L \longrightarrow \varepsilon$

/* Nincs teendő */

$L_1 \longrightarrow U L_2$

$U.in\_loop := L_1.in\_loop$
$L_2.in\_loop := L_1.in\_loop$
/* Az utasításlista tulajdonsága öröklődik a lista elemeire. */

$U \longrightarrow$ `break`

/* Ellenőrzés: A ‘break’ utasítás ciklus belsejében van? */	
$\neg U.in\_loop$	
$error(\dots)$	SKIP

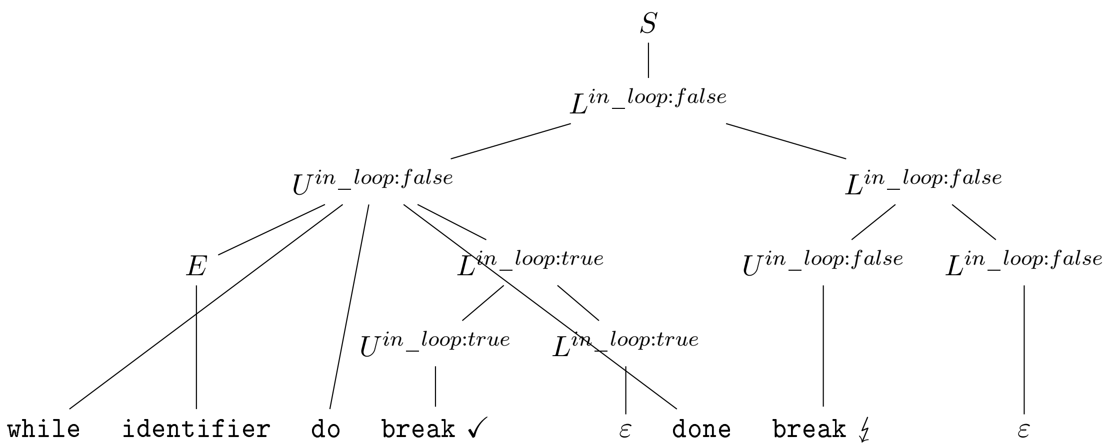
$U \longrightarrow$ `while` E `do` L `done`

$L.in\_loop := true$ /* A ciklus magja ciklus belsejében van. */

$E \longrightarrow$ `identifier`

/* Más akciók */

Az attribútumokkal ellátott fa pedig:



Ahogy láthatjuk, az első `break` utasítást helyesen használtuk, hiszen cikluson belül helyezkedik el, míg a második nem. Emiatt szemantikai hibát fog jelezni az elemző.

```
/*
  Nonterminal 'expression' has type 'type'.
*/
%type <type> expression

expression:
expression LESS_THAN expression
{
    /*
      $1, $2, $3, ... refer to
      the given attributes of the RHS of the rule.
    */
    if ($1 != int || $3 != int)
        error(...);
    else
        /* $$: the attribute of the LHS of the rule. */
        $$ = bool;
}
```

9.4. ábra. Példa a Bison szemantikus elemzőjére

A gyakorlatokon a Bison fordítógenerátort használjuk, aminek szemantikus elemzője kitüntetett szintetizált és szintetizált attribútumokat támogat, azonban örököltеket nem[2]. Emiatt jól illeszkedik az LR elemzéshez, hiszen egy lépésben elvégzi a szintaktikus és szemantikus elemzést.

[2]Az ilyen nyelvtanokat S-attribútumnyelvtanoknak nevezzük.

10. fejezet

Az Assembly alapjai

Az **Assembly** egy *alacsony szintű programozási nyelv*, amely segít áthidalni a masag szintű nyelvek és a gépi kód közti hatalmas „szakadékot”. Valójában a gépi kódnak egy ember számára olvashatóbb változatáról van szól, ami a rejtélyes hexadecimális számok helyett korlátozott számú rövid, tömör nevű **műveltek**et, valamint **regiszterek**et használ. Megengedi a programozó számára, hogy a memóriacímek azonosítására **címkék**et használjunk.

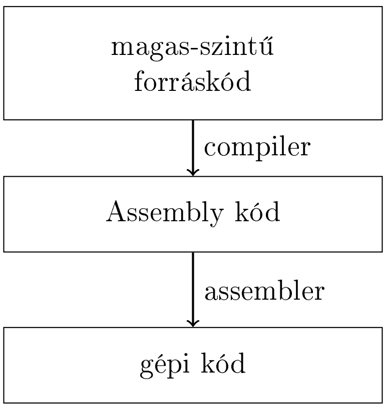
Az Assembly nem egy egységes nyelv, hanem inkább egy nyelvcsalád, aminek a nyelvei architektúránként eltér. Azonban vannak közös jellemzői. Fordítóprogramját **Assembler**nek nevezzük. A tanulmányai folyamán a **32-bites**, x**86-os architektúrá**jú, NASM szintaxisú Assemblyvel fogunk foglalkozni.

```cpp
int sum = 0;
for (int i = 0;
      i < len;
      ++i)
{
     sum += t[i];
}
```

```nasm
mov ecx,0
mov eax,0
eleje:
cmp ecx,10
jge vege
add eax,[ebx+4*ecx]
inc ecx
jmp eleje
vege:
```

```
B9 00 00 00 00
B8 00 00 00 00
81 F9 0A 00 00 00
7D 06
03 04 8B
41
EB F2
```

10.1. ábra. C++ kód, Assembly kód és gépi kód



10.2. ábra. A forráskód állapotának szakaszai

10.1. Adattárolás

A számítógépen alapvetően háromféleképpen tárolhatjuk az adatainkat.

Léteznek a processzorban a **regiszter**ek, amik nagyon **gyorsak**, bár **kis méretű** adatok tárolására képesek. Ezt a kapacitást az adott architektúra határozza meg, így egy **32-bites processzoron 1 regiszter 32 bitet** (= 4 bájtot) tárol.[1] Azon aktuális adatokat tároljuk el bennük, melyekkel **műveleteket akarunk végezni** (*hatékonyan*).

A **memória** nevezhető az „arany középútnak”, ugyanis **közepesen gyors** és **közepes a tárkapacitása**. Praktikus a programkód és a változók tárolására. A statikus memória, a **stack** és a **heap** is ezen helyezkedik el. A stack a program futásidejű, veremszerkezetű memóriája. A heapről sajnos nem lesz szó a tantárgy keretein belül.

És végül, de nem utolsó sorban, említésre méltóak a **háttértárak**. Ezek összehasonlítva **lassú**ak, cserébe **óriási tárkapacitás**sal rendelkeznek.

10.1.1. Regiszterek

32-bites architektúrán a regiszterek nevei `e`-vel kezdődnek.

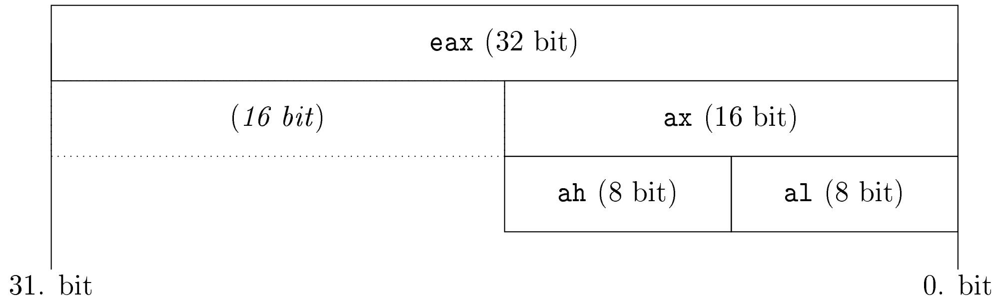
Általános célú regiszterek	
`eax`, `ebx`, `ecx`, `edx`, `esi`, `edi`	Egymással felcserélhetően használhatók (többnyire). Néhány *konvenció*, ha C függvények hívásához használjuk őket. – A függvény csak az `eax`, `ecx` és `edx` regisztereket hagyja változatlanul, a többit „elronthatja”. – A visszatérési érték az `eax` regiszterbe kerül.
Veremmel kapcsolatos regiszterek	
`esp`	*Stack pointer*, a futási idejű verem tetejét mutatja.
`ebp`	*Base pointer*, az éppen aktív eljáráshoz/függvényhez tartozó adatokra mutat a veremben.
Egyéb regiszterek	
`eip`	*Instruction pointer*, a következő végrehajtandó utasításra mutat.
`eflags`	Jelzőbitek gyűjteménye, pl. „az előző aritmetikai utasítás eredménye nulla volt-e?”.

10.3. ábra. Regiszterek csoportosítása

Az *egyéb regisztereket* **nem érjük el közvetlenül**, egyes utasítások olvassák/írják őket (pl. a `cmp` a `eflags`-et vagy a `call` a `eip`-t).

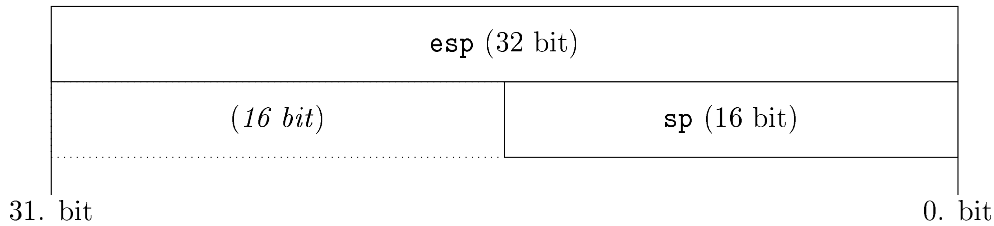
A regiszterek szerkezete a következő. Az általános célú regiszterek (pl. az `eax`, `ebx`, `ecx`, `edx`) feloszhatók alsóbb szeletekre, akár több szinten is. Így lesz egy 16-bites `ax` (a 0.-től a 15. bitig) és egy szintén 16-bites, ám név nélküli szelete (a 16.-tól a 31. bitjéig). Az `ax` tovább osztható `al`-re és `ah`-ra (8-8 bitesek, a *low half* és *high half* elnevezésből). Az `eax`, `ax`, `al` mind egy-egy regiszter, de **nem függetlenek egymástól**. Ugyanis ha az `al` megváltozik, akkor az `ax` és az `eax` is vele változik.

[1] Vagy általánosan n-bites processzorban n-bitesek a regiszterek, ahol $n \in \mathbb{N}^+$ 2 hatványa.



10.4. ábra. Az `eax`, `ebx`, `ecx`, `edx` szerkezete

Más regiszterek (`esp`, `esi`, `edi`, `ebp`, `eip`) is feloszhtatók ugyan kevesebb, de hasonlóan „nevezetes szeletekre”, pl. `esp` (32-bit) – `sp` (alsó 16 bit).



10.5. ábra. Az `esp`, `esi`, `edi`, `ebp`, `eip` szerkezete

10.1.2. Címkék

A **címkék** arra szolgálnak, hogy az egyes memóriacímekre kényelmesebben tudjunk hivatkozni. Önmagában nem tárolnak sem típusinformációt, sem a változó méretét. Az utóbbiról kifejezetten fontos, hogy gondoskodjunk, ugyanis csak az alapján képes eldönteni a program, hogy az adott memóriacímtől kezdve hány bájtot olvasson be. Ha belegondolunk, ez hasonlít arra, ahogyan a C-ben a tömbök, pointerek működnek.

```asm
global main  ; global label used to denote the entry point of the program
extern <label> ; label is declared but defined elsewhere (externally)

; uninitialised variables
section .bss
a: resd 1 ; 1x4 bytes reserved at 'a'
b: resw 1 ; 1x2 bytes reserved at 'b'
c: resb 256 ; 256x1 bytes reserved at 'c' (i.e. character array)

; initialised variables
section .data
d: dd 42 ; 1x4 bytes defined as '42' at 'd'
e: dw 1,2,3,4 ; 4x2 bytes defined as '1,2,3,4' at 'e' (array)
f: db 'a' ; 1x1 bytes defined as 'a' (ASCII) at 'f'

; source code starts here
section .text
main:
    ; machine instructions ...
```

Assembly program. A forráskód kiterjesztése `*.asm`

- `global main` : Ebben a fájlban definiáljuk a „main” címkét, és szeretnénk, hogy globálisan látható legyen.
- `extern <label>` : A `<label>` címke máshol van definiálva, de itt szeretnénk használni.
- `section .bss` : Kezdőérték nélküli memóriaterület („*block starting symbol*”). A rövidítések jelentése: `res` ⟶ „*reserve*”.

$$\texttt{res}\begin{cases}\texttt{b} \longrightarrow \text{„\textit{byte}”} & = 1 \text{ bájt}\\ \texttt{w} \longrightarrow \text{„\textit{word}”} & = 2 \text{ bájt}\\ \texttt{d} \longrightarrow \text{„\textit{double}”} & = 4 \text{ bájt.}\end{cases}$$

- `section .data` : Kezdőértékkel rendelkező memóriaterület. A rövidítések jelentése: `d` ⟶ „*define*”.

$$\texttt{d}\begin{cases}\texttt{b} \longrightarrow \text{„\textit{byte}”} & = 1 \text{ bájt}\\ \texttt{w} \longrightarrow \text{„\textit{word}”} & = 2 \text{ bájt}\\ \texttt{d} \longrightarrow \text{„\textit{double}”} & = 4 \text{ bájt.}\end{cases}$$

- `section .text` : Itt kezdődik a programkód, az utasítások sorozata.
  - Minden utasításnak lehet címkéje, de nem kötelező. Lehet csak címkét tartalmazó sor is.
  - Önálló assembly programoknál a program belépési pontja a `_start` címke, de megírhatjuk egy C program main függvényét is, ekkor `main` címkét használunk.
  - Az utasításoknak van neve (mnemonikja) és operandusai.
  - Megjegyzések: a `;` karaktertől a sor végéig.
- `main:` : Main címke; itt kezdődik a program 'main' függvénye.

A memóriahivatkozás címkékkel a következőképp történik:

`<size> [<label>]`,

ahol a `<size>` lehet `byte` (1 bájt), `word` (2 bájt) vagy `dword` (4 bájt), a `<label>` meg egy címke. Fontos, hogy ugyanolyan mérettel „paraméterezzük fel”, amilyennek deklaráltuk.

A kódban az alábbi módon történne a memóriahivatkozás:

`dword [a]`, `word [b]`, `byte [c]` (a tömb első eleme).

A hivatkozásba írhatók regiszterekből, címkékből és számliterálokból álló egyes kifejezések, pl.:

`dword [a+4*ecx]` (az `a` tömb 4. eleme, ha 4 bájtosak az egyes elemek).

10.2. Utasítások, műveletek

Először általánosságokban beszélünk az Assembly utasításairól, utána csoportonként átnézzük a specifikusabb részleteket.

Ahogy azt megfigyelhettük, az Assembly utasításai **prefix jelölés**t használnak. Ez jó, mert a fordítók hatékonyan fel tudják dolgozni (lásd *Algoritmusok és adatszerkezetek I.*). Egy utasítás felvehet 0, 1 vagy 2 paramétert.

A kétparaméteres utasítások szerkezete a következő:

`instruction <destination> <source>`.

Értelemszerűen az `instruction` jelöli az utasítást. A `<destination>` lehet regiszter vagy memóriahivatkozás, míg a `<source>` lehet regiszter, memóriahivatkozás vagy literál.

Legfeljebb az egyik lehet memóriahivatkozás!

Továbbá biztosítanunk kell a megfelelő **offset**et, azaz **memóriahivatkozásnál meg kell adnunk az olvasandó méretet** a fent bemutatott módon (`byte`, `word`, `dword`). Ha valamelyik operandus regiszter, akkor abból kiderül, így elhagyható.

A művelet **végeredménye a `<destination>` által jelölt memóriacímbe lesz írva**.

```
; correct
mov eax,0 ; one of them is a register, the size is evident
mov bx,ax ; the sizes of the two registers are equal
mov [lab1], al ; one of them is a register, the size is evident
mov dword [lab2], 987 ; the size of the label needs to be specified
mov ebx, [lab3] ; one of them is a register, the size is evident
```

Helyes paraméterezés

```
; incorrect
mov byte [lab4], byte [lab5] ; two labels are not allowed
mov al, ax ; the sizes of the two registers are NOT the same
```

Helytelen paraméterezés

Egyparaméteres utasításoknál a végeredmény az egyetlen paraméter memóriacímében lesz elhelyezve:

`instruction <parameter>`.

A `<parameter>` operandus lehet regiszter vagy memóriahivatkozás.

10.2.1. Adatmozgató utasítások

Utasítás: `mov`. A mozgatás valójában másolást jelent: a „honnan” nem változik meg.

10.2.2. Aritmetikai utasítások

Kétparaméteres műveletek: `add` (összeadás), `sub` (kivonás).

Egyparaméteres műveletek: `inc` (inkrementálás), `dec` (dekrementálás).

A szorzás (`mul`) és osztás (`div`) igs egyparaméteres műveletek, azonban a működésük nem teljesen intuitív.

A szorzás összeszorzza az `eax` és a paraméterül kapott memóriacím tartalmát. Az eredmény az `eax`-be kerül, azonban túlcsoldulás esetén a további bitek az `edx`-ben lesznek rögzítve.

```
mov eax, 5 ; Load 5 into eax
mov ebx, 6 ; Load 6 into ebx
mul ebx ; Multiply eax by ebx (5 * 6 = 30)
; After this, eax = 30 and edx = 0 because the result fits in 32 bits
```

A `div` is hasonló elvet követ – ott csupán nem a túlcsordulás esete áll fenn, hanem az osztási maradéké. Ez az, amit az `edx`-ben eltárol.

```
mov eax, 30 ; Load 30 into eax
mov edx, 0 ; Clear edx
mov ecx, 4 ; Load 4 into ecx
div ecx ; Divide edx:eax by ecx (30 / 4)
; After this, eax = 7 (quotient), edx = 2 (remainder)
```

Megjegyzés. Felhívjuk a figyelmet, hogy a `mul` és `div` előjel nélküli egész számoknak tekinti az operandusait. Előjeles számok esetén `imul` és `idiv` használandó.

10.2.3. Bitműveletek

Kétparaméteres műveletek: `and`, `or`, `xor`.

Egyparaméteres műveletek: `not`.

10.2.4. Ugróutasítások

Módosíthatják azon regiszterek tartalmát (`eip`[2], `eflags`[3]), amihez amúgy nincs közvetlen hozzáférésünk.

Feltétel nélküli ugrás

Egyparaméteres utasítások: `jmp <label>`.[4] Módosítja az `eip`-t.

// Ábra

Feltételes ugrások

Kétparaméteres utasítások: `cmp <mit> <mivel>` (*compare*).

1. A `cmp` utasítás kivonást végez, de nem tárolja el az eredményt, hanem annak előjele alapján jelzőbiteket állít át az `eflags` regiszterben.
2. Ha a kivonás eredménye 0 (azaz az összehasonlított értékek egyenlők), akkor a **zero flag** 1 lesz, különben 0.

Egyparaméteres utasítások: `je` (*jump if equal*), `jne` (*jump if not equal*), `jb` (*below*) = `jnae`, `ja` (*above*) = `jnbe`, `jnb` = `jae`, `jna` = `jbe`.

[2] A következő végrehajtandó utasításra mutat.
[3] Jelzőbitek gyűjteménye, pl. „az előző aritmetikai utasítás eredménye nulla volt-e?”.
[4] Megfeleltethető *„az átkos”* `goto` utasításnak.

1. A feltételes ugró utasítások a jelzőbiteket figyelik.
2. A `je` akkor ugrik, ha a **zero flag** 1, egyébként a következő utasításra kerül a vezérlés.

Megjegyzés. Ezek előjel nélküli egész számokat feltételeznek!

// Ábra

Feltételes adatmozgatás

Kétparaméteres utasítások: cmov <hova> <honnan> (*conditional move*).

// Ábra

Elágazások, ciklusok

```
cmp eax,ebx
je egyenlo
mov eax,ebx
egyenlo:
```

Egyágú elágazás

```
cmp ebx,ecx
ja nagyobb
mov eax,ecx
jmp vege
nagyobb:
mov eax,ebx
vege:
```

Kétágú elágazás

```
mov eax,0
eleje: cmp ecx,0
je vege
add eax,ecx
dec ecx
jmp eleje
vege:
```

Ciklus

10.2.5. Veremműveletek

Minden futó programhoz tartozik egy verem vagy más néven **stack**. Ezt a memóriaterületet az **operációs rendszer rendeli hozzá** a programhoz. Az `esp` regiszter mutatja a verem tetejét. Általában itt tároljuk:

- függvények paraméterei
- függvények visszatérési címe
- függvények lokális változói
- időlegesen tárolt adatok

Nem meglepően, a kapcsolódó *egyparaméteres műveletei*: `push` és `pop`.

Megjegyzés. Mindkét esetben csak 2 vagy 4 bájtos lehet az operandusa a két utasításnak!

// Ábra

Függvényhívás és visszatérés

Egyparaméteres utasítás: call <címke>. Valójában ez is egyfajta ugróutasítás.

Paraméter nélküli utasítás: `ret`.

Megjegyzés. Mindkettő módosítja az `eip` és az `esp` értékét!

// Ábra

Függvényhívás paraméterrel

Nincsenek külön műveletek erre – az idáig bemutatottakat alkalmazzuk.

- A függvény paraméterét a verembe tesszük a hívás előtt.
- A függvény törzse kimásolja a paramétert a veremből.
- A visszatérési érték az `eax` regiszterben van.
- A hívás után kivesszük a paramétert (vagy legalább a veremmutatót visszaállítjuk).

10.3. Fordítás

A fordításhoz a `nasm` assemblert használjuk, ami előállítja a **tárgykódot**.

Vegyük az alábbi kódokat!

```
global main
extern write_natural
extern read_natural

section .text
main:
call read_natural
inc eax
push eax
call write_natural
add esp,4
mov eax,0
ret
```

`addone.asm`

```
#include <stdio.h>

void write_natural(unsigned n)
{
    printf("%u\n", n);
}

unsigned read_natural()
{
    unsigned ret;
    scanf("%u", &ret);
    return ret;
}
```

`io.c`

Az `addone.asm` meghívja az `io.c`-ből a `read_natural` függvényt, ami beolvas egy előjel nélküli természetes számot, majd ezt kiíratja a `write_natural` meghívásával. Végül a program terminál.

Az említett két függvényt az egyszerűség kedvéért C-ben írjuk meg. Lehetne tisztán Assemblyben is, de az jóval bonyolultabb volna.

Első lépésként az Assembly kódot fordítjuk le. A `-felf` kapcsolóval megadjuk a fájl formátumát (a mi esetünkben ez `elf`).

```
nasm -felf addone.asm
```

Ezután a C fordítóval lefordítjuk gépi kódra az `io.c`-t, majd összelinkeljük a kapott tárgykódokat, ügyelve arra, hogy 32-bites architektúrájúra fordítsuk le (`-m32`).

```
gcc -m32 -oaddone io.c addone.o
```

Végül nincs más hátra, mint hogy kipróbáljuk!

```
./addone
41
42
```

11. fejezet

Kódgenerálás

Elérkeztünk a kurzus azon pontjára, amikor is megkoronázzuk az eddigi munkálatainkat, azaz a fordítóprogramunk működő számítógépes programot képes gyártani!

11.1. Kódgenerálás attribútumnyelvtannal

Kódot generálni általában úgy szoktunk, hogy **transzlációval** a saját, magas szintű nyelvünket lefordítjuk **Assemblyre**, majd az assembler legenerálja nekünk a kívánt gépi kódot. Kizárólag indokolt esetben érdemes közvetlenül gépi kódot generálni.

Ott hagytuk abba, hogy a szemantikus elemző ellenőrizte a deklarációkat a szimbólumtáblával és a típusokat az attribútumnyelvtannal. Haladjunk ezen az útvonalon – pontosabban az alulról felfele, LR elemző megoldásának útján.

A szabályok bal oldalaihoz, mint láttuk, felvettünk attribútumokat, melyek különféle tulajdonságokat határoztak meg. *Miért ne tehetnénk meg ugyanezt magával a kód generálásával?*

Vegyük fel a *szabályok bal oldalához* a **következő szintetizált attribútumot**: $code : \mathbb{S}$. Ez egy egyszerű sztring lesz, amihez hozzákonkatenáljuk az egyes részeket, ahogy haladunk felfele a szintaxisfában.

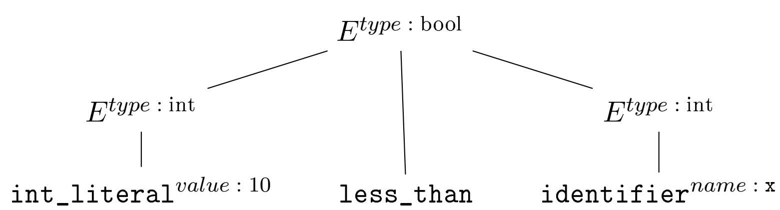
A nyelvtan továbbra is

$$E \longrightarrow \texttt{int\_literal} \mid \texttt{identifier} \mid E \; \texttt{less\_than} \; E.$$

A mondatunk:

`10 < x.`

Az elemzett szintaxisfa eddigi állapota:



A korábban definiált, szabályokhoz rendelt **akciókat módosítsuk** úgy, hogy megadjuk az Assembly kódrészleteket.

$E \longrightarrow$ `int_literal`

$E.type :=$ int
$E.code :=$ "`mov eax ,`" + `int_literal`.$value$ + "`\n`"

$E \longrightarrow$ `identifier`

`identifier`.$name \notin symbol\_table$		
$error(\dots)$	$type := symbol\_table.get\_type($`identifier`.$name)$	
	$E.type := type$	
	$E.type =$ int	$\dots$
	$E.code :=$ "`mov eax, [`" + $type$ + "`]\n`"	/* Ha logikai lenne, az kisebb regiszterben is elférne */

$E_1 \longrightarrow E_2$ `less_than` E_3

$E_2.type \neq \text{int} \vee E_3.type \neq \text{int}$	
$error(\dots)$	$E_1.type :=$ bool
	$E_1.code := E_2.code$ + "`push eax\n`" + $E_3.code$ + "`mov ebx, eax\n`" + "`pop eax \n`" + "`cmp eax, ebx\n`" + "`mov al, 0\n`" + "`cmovb al, 1\n`"

Ahhoz, hogy megkönnyítsük a munkánkat, bevetejünk ún. kódgenerálási sémákat, melyek hatékonyabbá teszik az Assembly kódok „megkomponálását”.

11.2. Kódgenerálási sémák

A sémákat nem szabványos struktogramok formájában írom fel.

A számokat 32 bites, előjeles egész számként fogjuk tárolni. Minden szám típusú kifejezés eredményét az `eax` regiszterbe fogjuk kiszámolni.

$E \longrightarrow$ `int_literal`

`mov eax,` *literál értéke*

11.1. ábra. Számliterál kifejezés kódgenerálási sémája

A logikai értékeket 1 bájton fogjuk tárolni. Adatreprezentáció: $false = 0$ és $true = 1$. Minden logikai típusú kifejezés eredményét az `al` regiszterbe fogjuk kiszámolni.

$E \longrightarrow$ `false`

`mov al, 0`

$E \longrightarrow$ `true`

`mov al, 1`

11.2. ábra. Logikai literál kifejezés kódgenerálási sémája

A változók adatait a szimbólumtáblában tároljuk. Mindegyikhez egy egyedi címkét generálunk, amikor betesszük őket a táblába. A változó használatakor kiolvassuk a címkét, és beépítjük a generált kódba.

$E \longrightarrow$ `identifier`

mov eax, [*címke*]

$E \longrightarrow$ `identifier`

mov al, [*címke*]

11.3. ábra. Változó mint kifejezés kódgenerálási sémája

Ehhez megtesszük az értelemszerű módosításokat a szimbólumtábla implementációjában is.

SymbolTable
+ *name* : $\mathbb{S}$
⋮
+ *code* : $\mathbb{S}$
+ *label* : $\mathbb{S}$
+ SymbolTable(...)
⋮
+ next_label() : $\mathbb{S}$
`/* additional methods may come here */`

11.4. ábra. A szimbólumtábla egy lehetséges módosítása

Beépített operátorok kódgenerálási sémája:

$E_1 \longrightarrow E_2$ `plus_op` E_3

E_2 kódja
push eax
E_3 kódja
mov ecx, eax
pop eax
add eax, ecx

$E \longrightarrow$ `identifier`

E_2 kódja
push eax
E_3 kódja
mov ecx, eax
pop eax
mul eax, ecx

11.5. ábra. Összeadás és szorzás kódgenerálási sémája

$E_1 \longrightarrow E_2$ `plus_op` E_3

E_2 kódja
`push eax`
E_3 kódja
`mov ecx, eax`
`pop eax`
`cmp eax, ecx`
`mov al, 0`
`cmovb al, 1`

$E \longrightarrow$ `identifier`

E_2 kódja
`push ax`
E_3 kódja
`mov cx, ax`
`pop ax`
`and al, cl`

11.6. ábra. Kisebb operátor és logikai „és” kódgenerálási sémája

Értékadás kódgenerálási sémája egész számra (bal oldal) és logikai értékre (jobb oldal). A változó címkéjét itt is a szimbólumtáblából vesszük.

$U \longrightarrow$ `identifier assign_op` E

E kódja
`mov [`*`címke`*`], eax`

$U \longrightarrow$ `identifier assign_op` E

E kódja
`mov [`*`címke`*`], al`

11.7. ábra. Értékadás kódgenerálási sémája

Elágazás kódgenerálási sémái. A kódgenerálási sémában szereplő címkék (pl. *vége*, *hamis*) helyett a séma minden felhasználásakor egyedi címkéket kell generálni (pl. `label0`, `label1`, `label2`, ...)[1]

$U \longrightarrow$ `if` E `then` P `end`

E kódja
`cmp al, 1`
`jne near` *`vége`*
P kódja
`vége``:`

$U \longrightarrow$ `if` E `then` P_1 `else` P_2 `end`

E kódja
`cmp al, 1`
`jne near` *`hamis`*
P_1 kódja
`jmp` *`vége`*
`hamis:`
P_2 kódja *`vége`*`:`

11.8. ábra. Egy- és kétágú elágazás kódgenerálási sémája

[1]Lásd a módosított UML-diagramot.

$U \longrightarrow$ `while` E `do` P `done`

```
eleje:
E kódja
cmp al, 1
jne near vége
P kódja
jmp eleje
vége:
```

$U \longrightarrow$ `do` P `while` E

```
eleje:
P kódja
E kódja
cmp al, 1
je near eleje
```

11.9. ábra. Elöl- és hátultesztelő ciklus kódgenerálási sémája

Utolsó előtti lépésként a **szimbólumtáblát is rögzítenünk kell a kódban**. Ehhez végigiterálunk a tábla bejegyzésein és az **Assembly kód** `.bss` **szekciójába** beillesztjük. Sem a név, sem a méret miatt nem kell aggódnunk, ugyanis ezek az információk mind kinyerhetők a *label* : $\mathbb{S}$ (változónév) és *type* : Type (méret) attribútumok segítségével.

Név	**Fajta**	**Típus**	**Címke**
`b`	változó	bool	*lab0*
`i`	változó	int	*lab1*

```
section .bss
lab0: resb 1
lab1: resd 1
```

Végül, a teljes program sémája. Ebbe fognak beillesztődni az egyes kódsémák, kódrészletek, amint az elemző elérte a szintaxisfa gyökerét.

```
global main
extern ; external labels

section .bss
; variables from symbol table

section .text
main:
; program instructions
ret
```

A teljes program sémája